

wydanie
polecane
przez
nauczycieli

TABLICE

matematyczne

- przejrzysty układ
- niezastąpione na lekcji i w domu
- zgodne z potrzebami uczniów i wymaganiami nauczycieli



GREG
WYDAWNICTWO EDUKACYJNE

Autor:

Beata Prucnal, Piotr Gołąb, Piotr Kosowicz

Redakcja merytoryczna:

Beata Piekarczyk, Zofia Daszczyńska

Rysunki:

Beata Prucnal

Korekta:

Agnieszka Nawrot

ISBN 978-83-7517-010-8

© Copyright by Wydawnictwo „GREG”

Kraków

31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B

tel. (12) 680 15 50

www.greg.pl

Księgarnia internetowa: www.greg.pl

Wszystkie prawa zastrzeżone.

Żadna część niniejszej publikacji nie może być reprodukowana
lub przedrukowana bez pisemnej zgody Wydawnictwa „GREG”.

Dotyczy to także przenoszenia danych do systemów komputerowych,
wykonywania fotokopii i mikrofilmów.

Skład i łamanie: BROS

Opracowanie graficzne: BROS

Projekt okładki: Aleksandra Zimoch

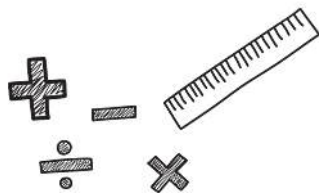
Shutterstock: Aleksey Troshin, Rawpixel, Veronika By

wydanie
polecane
przez
nauczycieli

TABLICE

matematyczne

- przejrzysty układ ■
- niezastąpione na lekcji i w domu ■
- zgodne z potrzebami uczniów ■
i wymaganiami nauczycieli



OD WYDAWCY

Tablice matematyczne zostały przygotowane z myślą przede wszystkim o tych, którzy chcą szybko odnaleźć potrzebne dane liczbowe, wzory i twierdzenia matematyczne oraz definicje. Zebrano tu materiał z różnych działów matematyki, kierując się przede wszystkim wymaganiami nauczycieli i, co za tym idzie, potrzebami uczniów. Wiadomości zebrano w tablicach, tak by łatwo było z nich korzystać. W tej książce nie ma też żadnych zbędnych wiadomości. Wiedza została podana skrótowo, ale precyzyjnie.

Książka będzie z pewnością przydatna zarówno uczniom szkoły podstawowej, jak i liceum w trakcie powtarzania materiału i rozwiązywania zadań.

Wydawnictwo GREG

SPIS TREŚCI

Alfabet grecki, wybrane stałe, nazwy liczb	7
Cyfy i liczby rzymskie, jednostki podstawowe	8
Wybrane własności liczb	9
Działania arytmetyczne	10
Ułamki, proporcjonalność, proporcje	11
Podstawowe pojęcia algebry	13
Dwumian Newtona	15
Tablica pierwiastków kwadratowych	17
Tablica pierwiastków sześciennych	21
Podstawowe typy równań	25
Postaci trójmianu kwadratowego	26
Wielomiany	27
Układy równań liniowych	28
Logarytm: definicje i własności	30
Tablica logarytmów naturalnych	31
Tablica logarytmów dziesiętnych	33
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	34
Wykresy funkcji trygonometrycznych	38
Tablice funkcji trygonometrycznych	39
Funkcje cyklometryczne	43
Ciąg arytmetyczny i geometryczny	44
Średnie	45
Granica ciągu	45
Pojęcie funkcji	47
Granica funkcji w punkcie	48
Badanie przebiegu zmienności funkcji	50
Wybrane własności funkcji	50
Funkcje: liniowa, kwadratowa i homograficzna	51
Funkcje: wartość bezwzględna, signum, $E(x)$	53
Monotoniczność funkcji	53
Rachunek różniczkowy	54
Pochodne funkcji elementarnych	55
Rachunek całkowy	56
Całki funkcji elementarnych	57
Elementarne przekształcenia funkcji	57
Macierze i wyznaczniki	58
Podstawowe twierdzenia geometrii	60
Podstawy geometrii	61
Kąty w różnym ujęciu	61
Wybrane przekształcenia geometryczne	63

Prosta	66
Płaszczyzna	67
Trójkąty	68
Czworokąty	70
Klasyfikacja wielokątów	72
Okrąg	73
Koło i jego części	75
Bryły	75
Krzywe drugiego stopnia	79
Wektory	81
Działania na zbiorach	82
Elementy logiki	83
Rachunek zdań a rachunek zbiorów – analogie	84
Elementy kombinatoryki	85
Rachunek prawdopodobieństwa	86

ALFABET GRECKI, WYBRANE STAŁE, NAZWY LICZB

ALFABET GRECKI						WYBRANE STAŁE	
A	α	alfa	N	ν	ni	$\pi \approx 3,14159$	$\sqrt{7} \approx 2,64575$
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi		
Γ	γ	gamma	O	ο	omikron	$e \approx 2,71828$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,70711$
Δ	δ	delta	Π	π	pi		
E	ε	epsilon	P	ρ	ro	$\sqrt{2} \approx 1,41421$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57735$
Z	ζ	dzeta	Σ	σ	sigma		
H	η	eta	T	τ	tau	$\sqrt{3} \approx 1,73205$	1 radian $\approx 57^{\circ} 17'$
Θ	θ	teta	Υ	υ	ypsilon		
I	ι	jota	Φ	φ	fi	$\sqrt{5} \approx 2,23607$	$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
K	κ	kappa	X	χ	chi		
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi		
M	μ	mi	Ω	ω	omega		

NAZWY LICZB			
Przedrostki	Oznaczenie	Potęgi liczby 10	Nazwa liczby
piko	p	$10^{-12} = 0,000\ 000\ 000\ 001$	bilionowa
nano	n	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$	miliardowa
mikro	μ	$10^{-6} = 0,000\ 001$	milionowa
mili	m	$10^{-3} = 0,001$	tyśięczna
centy	c	$10^{-2} = 0,01$	setna
decy	d	$10^{-1} = 0,1$	dziesiąta
deka	da	$10^1 = 10$	dziesięć
hekto	h	$10^2 = 100$	sto
kilo	k	$10^3 = 1000$	tyśięć
mega	M	$10^6 = 1000\ 000$	milion
giga	G	$10^9 = 1000\ 000\ 000$	miliard
tera	T	$10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$	bilion
peta	P	$10^{15} = 1000\ 000\ 000\ 000\ 000$	bilird
eksa	E	$10^{18} = 1000\ 000^3$	trylion
		$10^{24} = 1000\ 000^4$	kwadrylion
		$10^{30} = 1000\ 000^5$	kwintylion
		$10^{60} = 1000\ 000^{10}$	decylion

LOGARYTM: DEFINICJE I WŁASNOŚCI

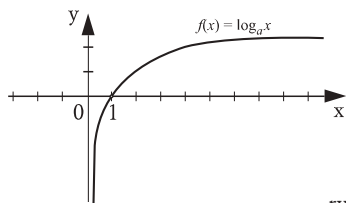
LOGARYTM – DEFINICJE I WŁASNOŚCI	
Logarytmem z liczby dodatniej b , przy podstawie a , gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę logarytmu, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b	liczba logarytmowana $\downarrow$ $\log_a b = x \leftarrow$ wynik logarytmowania (logarytm) $\uparrow$ podstawa logarytmowania
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $b > 0$	
logarytm dziesiętny – logarytm przy podstawie 10: $\log b = x \Leftrightarrow 10^x = b$ logarytm naturalny – logarytm przy podstawie e : $\ln b = x \Leftrightarrow e^x = b$	

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW I DZIAŁAŃ OKREŚLONYCH NA NICH			
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$a^{\log_a b} = b$	$\log_a a^x = x$
$a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}$			
- logarytm iloczynu	$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2; b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$		
- logarytm ilorazu	$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2; b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$		
- logarytm potęgi	$\log_a b^n = n \log_a b; b \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, n \in \mathbb{R}$		
- zmiana podstawy logarytmu	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, b \in \mathbb{R}_+, a, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$		

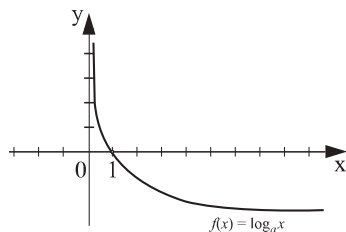
FUNKCJA LOGARYTMICZNA
Funkcję: $x \rightarrow y = \log_a x$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $x \in \mathbb{R}_+$ nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a i oznaczamy $\log_a x$. Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}_+$.
Własności funkcji logarytmicznej 1) Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór $\mathbb{R}$. 2) Monotoniczność: - dla $a \in (0, 1)$ funkcja $y = \log_a x$ jest malejąca w $\mathbb{R}_+$, - dla $a \in (1, +\infty)$ funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca. Z monotoniczności funkcji logarytmicznej wynika następujące twierdzenie, które wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych: a) Jeśli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, to $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. b) Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ c) Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ 3) Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa.

- dla $a > 1$ f. logarytmiczna jest funkcją rosnącą (rys. 1)
- dla $0 < a < 1$ f. logarytmiczna jest funkcją malejącą (rys. 2)
- funkcja logarytmiczna posiada jedno miejsce zerowe $x_0 = 1$
- funkcją odwrotną do f. logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ jest funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$.

Wykres funkcji logarytmicznej nazywamy **krzywą logarytmiczną**.



rys. 1.



rys. 2.

TABLICA LOGARYTMÓW NATURALNYCH

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
0,05	-2,9957	2,05	0,7178	4,05	1,3957	6,05	1,8001	8,05	2,0857
0,10	-2,3026	2,10	0,7419	4,10	1,4110	6,10	1,8083	8,10	2,0919
0,15	-1,8971	2,15	0,7655	4,15	1,4231	6,15	1,8165	8,15	2,0980
0,20	-1,6094	2,20	0,7885	4,20	1,4351	6,20	1,8245	8,20	2,1041
0,25	-1,3863	2,25	0,8109	4,25	1,4469	6,25	1,8326	8,25	2,1102
0,30	-1,2040	2,30	0,8329	4,30	1,4586	6,30	1,8405	8,30	2,1163
0,35	-1,0498	2,35	0,8544	4,35	1,4702	6,35	1,8485	8,35	2,1223
0,40	-0,9163	2,40	0,8755	4,40	1,4816	6,40	1,8563	8,40	2,1282
0,45	-0,7985	2,45	0,8961	4,45	1,4929	6,45	1,8641	8,45	2,1342
0,50	-0,6931	2,50	0,9163	4,50	1,5041	6,50	1,8718	8,50	2,1401
0,55	-0,5978	2,55	0,9361	4,55	1,5151	6,55	1,8795	8,55	2,1459
0,60	-0,5108	2,60	0,9555	4,60	1,5261	6,60	1,8871	8,60	2,1518
0,65	-0,4308	2,65	0,9746	4,65	1,5369	6,65	1,8946	8,65	2,1576
0,70	-0,3567	2,70	0,9933	4,70	1,5476	6,70	1,9021	8,70	2,1633

PODSTAWOWE TWIERDZENIA GEOMETRII

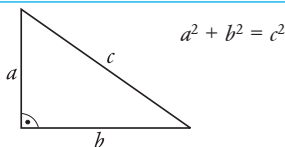
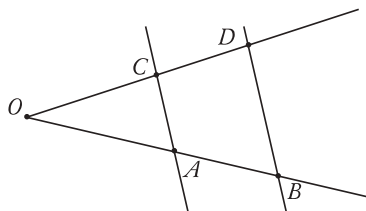
Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

Jeżeli $AC \parallel BD$, to $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$

Zachodzą też równości: $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|CA|}{|DB|}$

które wynikają z podobieństwa $\triangle OAC$ i $\triangle OBD$.



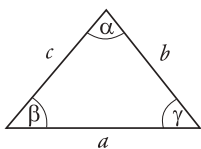
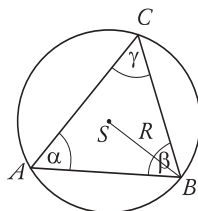
Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są stałe i równe długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{|AB|}{\sin \gamma} = \frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R$$



Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Twierdzenie cosinusów pozwala rozstrzygnąć, czy dany trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Trójkąt o bokach długości a, b, c jest:

- prostokątny, gdy $a^2 = b^2 + c^2$ lub $b^2 = a^2 + c^2$ lub $c^2 = a^2 + b^2$

- ostrokątny, gdy $a^2 < b^2 + c^2$ i $b^2 < a^2 + c^2$ i $c^2 < a^2 + b^2$

- rozwartokątny, gdy $a^2 > b^2 + c^2$ lub $b^2 > a^2 + c^2$ lub $c^2 > a^2 + b^2$

PODSTAWY GEOMETRII

WŁASNOŚCI MIARY KĄTA

- miara kąta jest wartością nieujemną,
- miary kątów przystających są sobie równe,
- miara kąta, którego obszar jest sumą kilku kątów, jest równa sumie miar kątów składowych.

ANALOGIE POJĘĆ GEOMETRYCZNYCH I ANALITYCZNYCH

Pojęcia geometryczne	Pojęcia analityczne
punkt na płaszczyźnie	para liczb
linia prosta	równanie I stopnia
punkt należący do prostej	para liczb spełniająca równanie I stopnia
punkt nie należący do prostej	para liczb nie spełniająca równania I stopnia
dwie proste	dwa równania I stopnia
punkt wspólny dwóch prostych	para liczb spełniająca układ dwóch równań I stopnia
dwie proste rozłączne	sprzeczny układ dwóch równań I stopnia
dwie proste przecinające się	układ dwóch równań I stopnia ma dokładnie jedno rozwiązanie – jest nim pewna para liczb
z badać, czy dany punkt przynależy do prostej	z badać, czy dana para liczb spełnia równanie prostej
obrać dowolny punkt prostej	wyznaczyć dowolną parę liczb spełniającą równanie I stopnia
znaleźć punkt przecięcia dwóch prostych	rozwiązać układ dwóch równań I stopnia

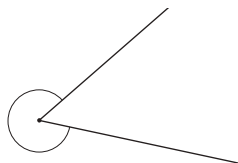
KĄTY W RÓŻNYM UJĘCIU

KĄTY W RÓŻNYM UJĘCIU

Kąt wypukły – kąt płaski, którego każde dwa punkty wewnętrzne można połączyć odcinkiem nie przecinającym jego ramion. W mierze stopniowej kąt wypukły przyjmuje wartości z przedziału $0^\circ - 180^\circ$, a w mierze łukowej od 0 do π .



Kąt wklęsły – kąt płaski taki, że istnieją w nim choćby dwa punkty wewnętrzne, których nie można połączyć odcinkiem nie przecinającym jego ramion. W mierze stopniowej kąt wklęsły przyjmuje wartości z przedziału $180^\circ - 360^\circ$, a w mierze łukowej od π do 2π .





NOWY EGZAMIN ÓSMOKLASISTY REPETYTORIUM

- sposób na wymarzone liceum!
- nie licz na przecieki, my mamy pewniaki!
- wiemy, co będzie na teście - z nami zdasz na 100%!

SCIAGA



- seria zgodna z najnowszą podstawą programową
- wszystkie obowiązkowe lektury
- najczęściej omawiane wiersze
- odpowiedzi na pytania z testów i sprawdzianów!

Pewniak
na teście

GREG
WYDAWNICTWO

Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B ■ 31-979 Kraków
www.greg.pl

ISBN 978-83-7517-010-8



9 788375 170108 >