klasa **8**

szkoła podstawowa

nowa podstawa programowa

MATEMATYKA

korepetycje

Pewniak na teście

zadania takie, jak na testach i sprawdzianach

rozwiązania krok po kroku

GREG
WYDAWNICTWO EDUKACYJNE

Korepetycje matematyka kl. 8

Autor:
Roman Gancarczyk
(wykorzystano materiały autorstwa Lucyny Butowskiej, Grażyny Matachowskiej)

Nadzór merytoryczny:
Lucyna Butowska, Zofia Daszczyńska, Bernadetta Szkarłat

Korekta:
Agnieszka Antosiewicz, Maria Zagnińska

Okładka:
Pracownia Słowa

Wykorzystano grafikę autorstwa:
Shutterstock.com: Maisei Raman

ISBN: 978-83-7517-884-5

Kraków
Wydanie II zaktualizowane

Wydawnictwo GREG®
31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B
tel. (12) 680 15 50
www.greg.pl

Księgarnia internetowa: www.greg.pl

Pewniak na teście | Uwaga! Będzie na teście!

Spis treści

ROZDZIAŁ I SYMETRIE

ROZDZIAŁ II FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE. WIELOKĄTY

ROZDZIAŁ III GEOMETRIA PRZESTRZENNA

ROZDZIAŁ IV DŁUGOŚĆ OKRĘGU I POLE KOŁA

ROZDZIAŁ V PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA

ROZDZIAŁ VI ODCZYTYWANIE DANYCH I ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

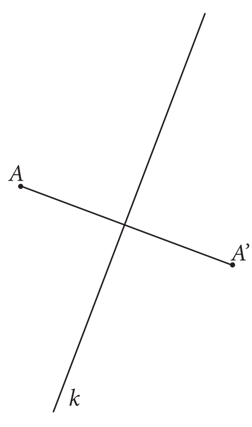
ROZDZIAŁ VII
WPROWADZENIE DO KOMBINATORYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Pewniak na teście — Uwaga! Będzie na teście!

ROZDZIAŁ I
SYMETRIE

SYMETRIA WZGLĘDEM PROSTEJ

Dwa punkty są symetryczne do siebie względem prostej *k*, jeżeli spełniają 3 warunki:
– leżą na prostej prostopadłej do prostej *k*,
– leżą po przeciwnych stronach prostej *k*,
– leżą w równych odległościach od prostej *k*.
Prostą *k* nazywamy osią symetrii.
Punktem symetrycznym do punktu leżącego na prostej *k* (osi symetrii) jest ten sam punkt.



Pewniak na teście

ZADANIE 1

Narysuj kwadrat o boku 4 cm oraz prostą *m* tak, aby pole figury złożonej z kwadratu i jego odbicia symetrycznego względem tej prostej było równe 20 cm^2.

Rozwiązanie:

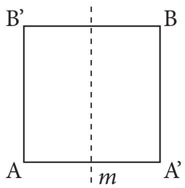
Obliczamy pole kwadratu o boku 4 cm:

$P = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$

Obliczamy, o ile cm^2 pole powstałej figury ma być większe od pola kwadratu:

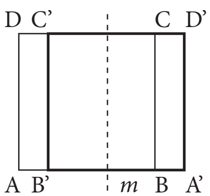
$20\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 = 4\text{ cm}^2$

Wykonujemy rysunek kwadratu:



Gdyby prosta *m* biegła przez środek boku kwadratu, wówczas odbiciem symetrycznym kwadratu byłby ten sam kwadrat, więc pole powierzchni powstałej figury wynosiłoby nadal 16 cm^2. Należy więc prostą *m* przesunąć tak, aby pole powstałej w ten sposób figury (kwadratu i jego odbicia symetrycznego względem prostej *m*) zwiększyło się o 4 cm^2.

Prosta *m* jest w tym przypadku osią symetrii figury.

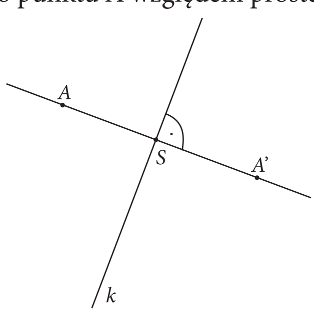


AA’ = 5 cm
A’D’ = 4 cm
Pole figury AA’D’D wynosi:
$P = 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$

Kwadrat ABCD wraz z jego odbiciem symetrycznym tworzą prostokąt AA’D’D. Pole tego prostokąta wynosi 20 cm^2. Prostą *m* należy przesunąć o 0,5 cm w prawo lub w lewo.

ZADANIE 2

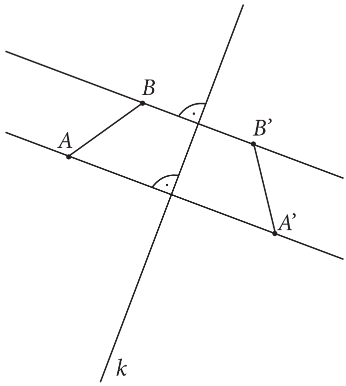
Znajdź punkt A’ symetryczny do punktu A względem prostej *k*.



Opis:
1. rysuję prostą *k* i zaznaczam punkt A nieleżący na tej prostej,
2. rysuję (przy pomocy ekierki) prostą prostopadłą do prostej *k* przechodzącą przez punkt A,
3. na tej prostej znajduję punkt A' (posługuję się cyrklem, odkładam długość odcinka AS po przeciwnej stronie prostej *k*).

ZADANIE 3

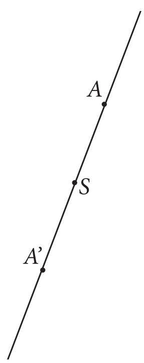
Narysuj odcinek symetryczny do odcinka AB względem prostej *k*.



Opis:
1. rysuję odcinek AB i prostą *k*,
2. znajduję obraz punktu A oraz punktu B w symetrii względem prostej *k* (postępując dokładnie tak jak w zadaniu 1),
3. łączę punkty A' i B', otrzymuję odcinek A'B' symetryczny do odcinka AB względem prostej *k*.

SYMETRIA WZGLĘDEM PUNKTU

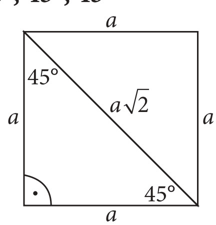
Punkty A i A' są symetryczne do siebie względem punktu S, jeżeli punkt S jest środkiem odcinka AA'.
|AS| = |A'S|



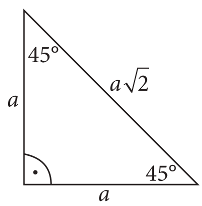
ROZDZIAŁ II
FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE. WIELOKĄTY

TRÓJKĄTY PROSTOKĄTNE O KĄTACH OSTRYCH 90°, 45°, 45° ORAZ 90°, 30°, 60°

Trójkąt o kątach 90°, 45°, 45°



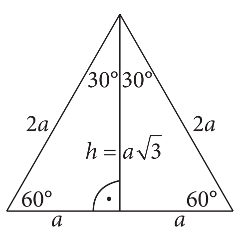
$a\sqrt{2} = d$ – długość przekątnej kwadratu o boku długości a



Trójkąt ten jest połową kwadratu o boku a.

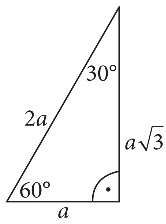
W trójkącie prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnych długości *a* przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$.

Trójkąt o kątach 90°, 60°, 30°



$$h = \frac{\cancel{2}a\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$h = a\sqrt{3}$$

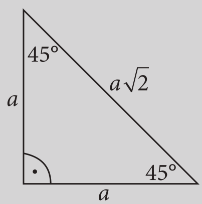


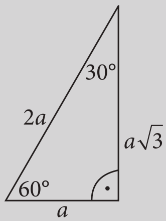
Trójkąt ten jest połową trójkąta równobocznego o boku $2a$.

Pamiętaj, że **przyprostokątna, leżąca naprzeciw kąta 30°, równa jest połowie długości przeciwprostokątnej.**

WAŻNE!

Zapamiętaj te dwa trójkąty!





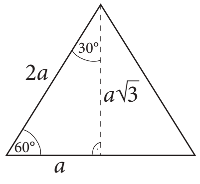
Zwróć uwagę, że w trójkątach o kątach 90°, 45°, 45° oraz 90°, 60°, 30° wystarczy znać długość jednego boku, aby obliczyć długość dwóch pozostałych.

ZADANIE 1

Pewniak na teście

Pole trójkąta równobocznego o boku 4 cm wynosi:
a) $4\sqrt{3}$ cm²   b) $2\sqrt{3}$ cm²   c) $8\sqrt{3}$ cm²   d) $4\sqrt{2}$ cm²

Rozwiązanie:



Z własności trójkąta równobocznego, gdzie $2a = 4$ cm

$a = 2$ cm

$h = a\sqrt{3}$

Wzór na wysokość trójkąta równobocznego.

$h = 2\sqrt{3}$ cm

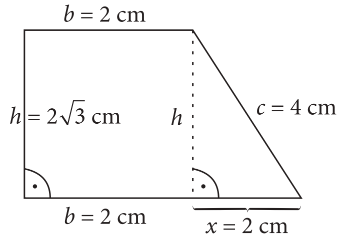
Obliczamy pole trójkąta:

$P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

$b = 2a = 4$ cm

b – długość boku trójkąta, czyli 4 cm

$h = 2\sqrt{3}$ cm



Obw. $= b + b + x + c + h$

Obw. $= 2 + 2 + 2 + 4 + 2\sqrt{3}$

Obw. $= 10 + 2\sqrt{3}$ cm

Obwód trapezu to suma długości wszystkich boków trapezu.

Pole trapezu o podstawach a, b i wysokości h.

$a = b + x$

$a = 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$

$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\,(a + b) \cdot h}$$

$$P = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot (4 + 2) \cdot \cancel{2}^1\sqrt{3}$$

$$P = 6 \cdot \sqrt{3}$$

$$P = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

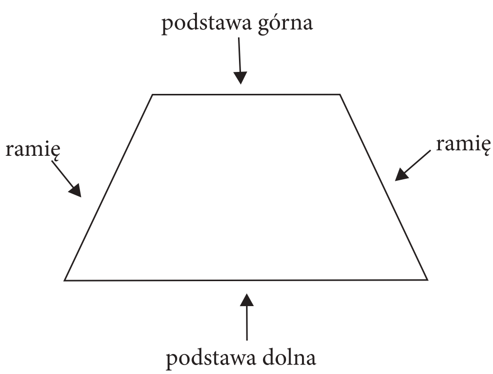
Odp.: Obwód trapezu wynosi $(10 + 2\sqrt{3})$ cm, a pole $6\sqrt{3}$ cm^2.

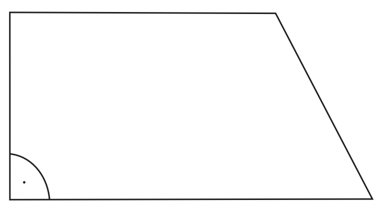
CZWOROKĄTY

Wielokąt, który ma cztery boki, nazywa się czworokątem.

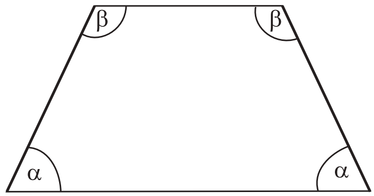
Pewniak na teście **Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°.**

Podział czworokątów:
Trapez – to taki czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.



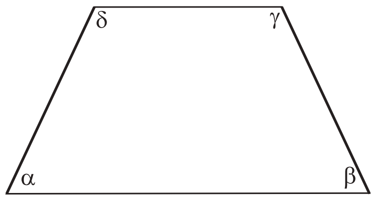


trapez prostokątny
(ma co najmniej 1 kąt prosty)



trapez równoramienny (ramiona są równej długości)

W trapezie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

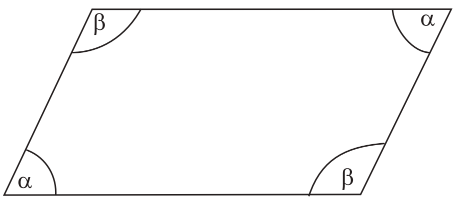


W trapezie suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu wynosi 180°.

$\alpha + \delta = 180°$

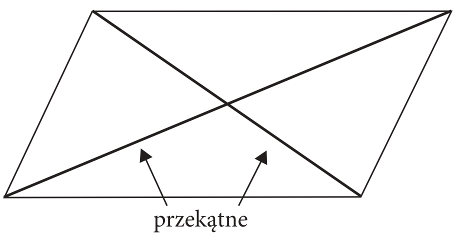
$\beta + \gamma = 180°$

Równoległobok – to taki czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.



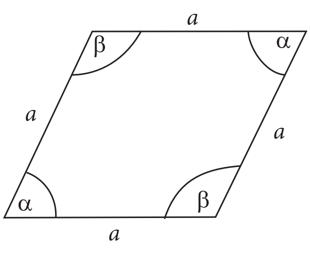
W równoległoboku przeciwległe kąty są równe.

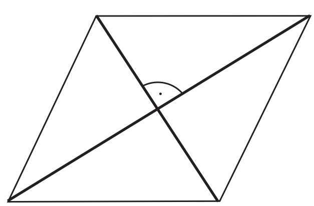
W równoległoboku suma miar kątów sąsiadujących wynosi 180° (czyli $\alpha + \beta = 180°$)



Przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.

Romb – to taki równoległobok, który ma boki równej długości.





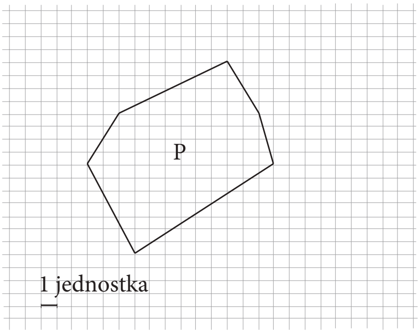
WAŻNE

Przekątne rombu przecinają się w połowie i są prostopadłe.

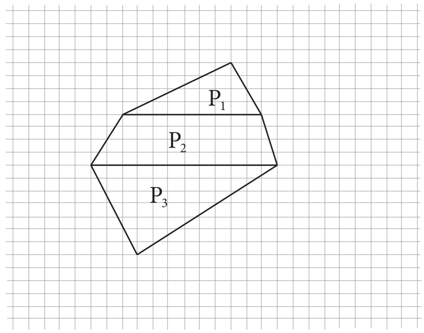
ZADANIE 1

Oblicz pola powierzchni przedstawionych figur.

a)



b)



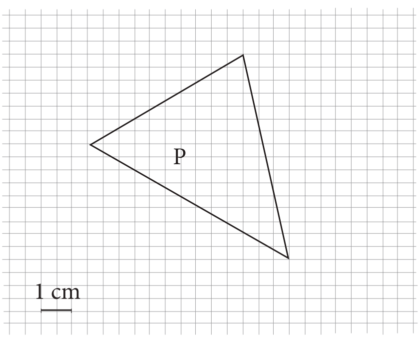
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 + \frac{1}{2}(12 + 9) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7 = 18 + 42 + 42 = 102 \text{ j}^2$$

Zdarza się, że lepszym sposobem jest opisanie wielokąta innym znanym wielokątem i odjęcie od jego pola pól naddatków. Wyjaśnijmy to na przykładzie poniżej.

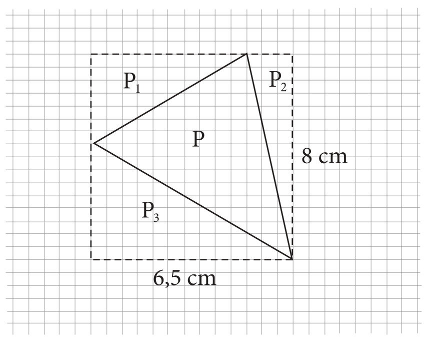
ZADANIE 2

Oblicz pola powierzchni przedstawionych figur.

a)



b)



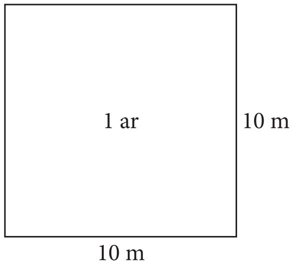
$$P = 6{,}5 \cdot 8 - P_1 - P_2 - P_3 = 52 - 8{,}75 - 6 - 14{,}625 = 22{,}625 \text{ cm}^2$$

Jednostki pola

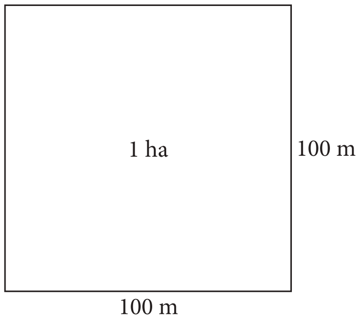
- 1 milimetr kwadratowy 1 mm^2
- 1 centymetr kwadratowy 1 cm^2
- 1 decymetr kwadratowy 1 dm^2
- 1 metr kwadratowy 1 m^2
- 1 kilometr kwadratowy 1 km^2

* **1 ar** **1 a**
* **1 hektar** **1 ha**

1 a = 10 m · 10 m = 100 m²



1 ha = 100 m · 100 m = 10 000 m²



1 ha = 100 a

Zamiana jednostek pola

Przypomnienie jednostek długości:

1 cm = **10** mm

1 mm = **0,1** cm

1 dm = **10** cm

1 cm = **0,1** dm

1 dm = **100** mm

1 mm = **0,01** dm

1 m = **10** dm

1 dm = **0,1** m

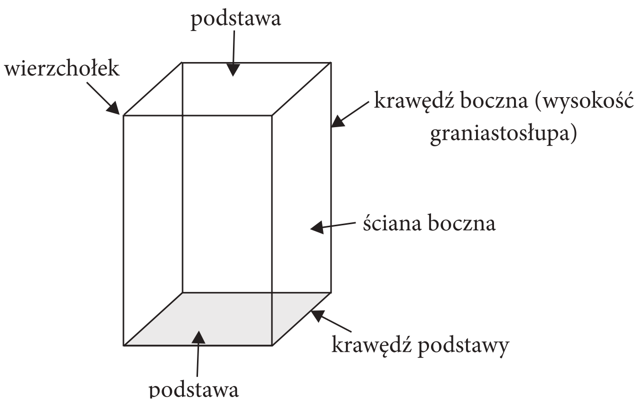
1 m = **100** cm

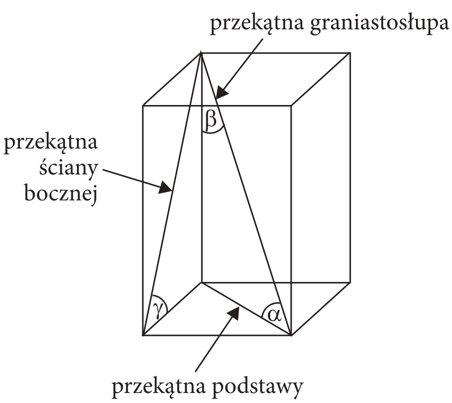
1 cm = **0,01** m

ROZDZIAŁ III
GEOMETRIA PRZESTRZENNA

GRANIASTOSŁUPY

Graniastosłup czworokątny (podstawa graniastosłupa jest czworokątem).



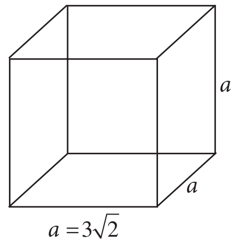


α – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy
β – kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną
γ – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy

ZADANIE 4

Pewniak na teście

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej:
a) sześcianu o krawędzi długości $3\sqrt{2}$ cm
b) prostopadłościanu o wymiarach 2 cm × 5 cm × 10 cm



a)
Dane:
$a = 3\sqrt{2}$ cm

Szukane:
$V = ?$
$P_c = ?$

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{V = a^3}$

$V = (3\sqrt{2})^3$

$V = 3^3 \cdot \sqrt{2}^3$

$V = 27 \cdot 2\sqrt{2}$

$\boldsymbol{V = 54\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3}$

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2)$

$\boldsymbol{P_c = 6a^2}$

$P_c = 6 \cdot (3\sqrt{2})^2$

$P_c = 6 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2}^2$

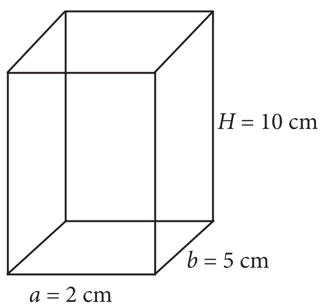
$P_c = 6 \cdot 9 \cdot 2$

$\boldsymbol{P_c = 108\ \mathrm{cm}^2}$

Odp.: Objętość sześcianu wynosi $54\sqrt{2}$ cm^3, a pole powierzchni całkowitej 108 cm^2.

b)
Dane:
$a = 2$ cm
$b = 5$ cm
$H = 10$ cm

Szukane:
$V = ?$
$P_c = ?$



Rozwiązanie:

$\boldsymbol{V = P_p \cdot H}$

$V = a \cdot b \cdot H$

$V = 2\ \mathrm{cm} \cdot 5\ \mathrm{cm} \cdot 10\ \mathrm{cm}$

$\boldsymbol{V = 100\ \mathrm{cm}^3}$

W podstawie prostopadłościanu jest prostokąt, $P_{\square} = a \cdot b$.

$\boldsymbol{P_c = 2 \cdot P_p + P_b}$

pole powierzchni całkowitej bryły

$P_p = a \cdot b$

$P_p = 2\ \mathrm{cm} \cdot 5\ \mathrm{cm}$

$\boldsymbol{P_p = 10\ \mathrm{cm}^2}$

$P_b = 2 \cdot a \cdot H + 2 \cdot b \cdot H$

$P_b = 2 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10$

$P_b = 40 + 100$

$\boldsymbol{P_b = 140\ \mathbf{cm^2}}$

Pole powierzchni bocznej jest sumą pól wszystkich ścian bocznych (ściany boczne są prostokątami).

$P_c = 2 \cdot 10\ \text{cm}^2 + 140\ \text{cm}^2$

$P_c = 20\ \text{cm}^2 + 140\ \text{cm}^2$

$\boldsymbol{P_c = 160\ \mathbf{cm^2}}$

Odp.: Objętość prostopadłościanu wynosi 100 cm^3, a pole powierzchni całkowitej 160 cm^2.

Pewniak na teście

ZADANIE 5

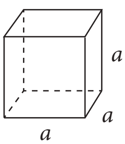
Suma krawędzi sześcianu jest równa 9,6 cm. Objętość tego sześcianu wynosi:

a) 0,512 cm^3 b) 51,2 cm^3 c) 0,12 cm^3 d) 0,8 cm^3

Dane:

S_k – suma krawędzi

$S_k = 9{,}6$ cm



Szukane:

V – objętość

$V = a^3$

a – długość krawędzi

Rozwiązanie:

$a = 9{,}6\ \text{cm} : 12$

Obliczamy długość krawędzi.

$a = 0{,}8\ \text{cm}$

$V = a^3$

$V = 0{,}8^3$

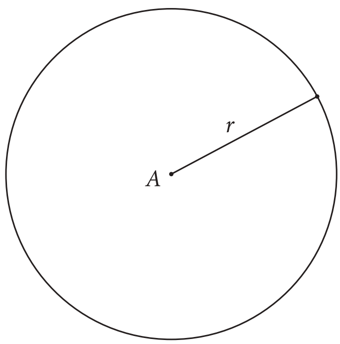
Obliczamy objętość sześcianu.

$V = 0{,}512\ \text{cm}^3$

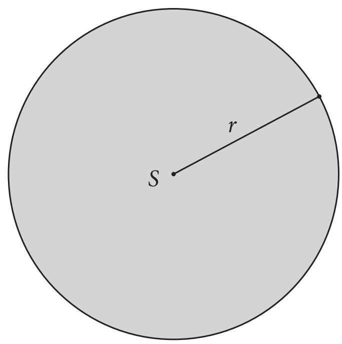
Odp.: a.

ROZDZIAŁ IV
DŁUGOŚĆ OKRĘGU I POLE KOŁA

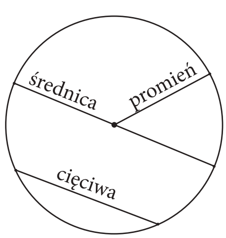
KOŁO I OKRĄG

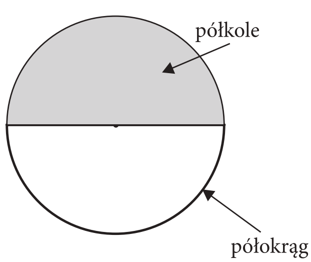


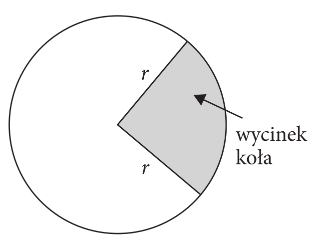
Okrąg o środku w punkcie *A* i promieniu *r* to zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu *A* jest równa promieniowi (*r*).
Środek okręgu nie należy do okręgu.

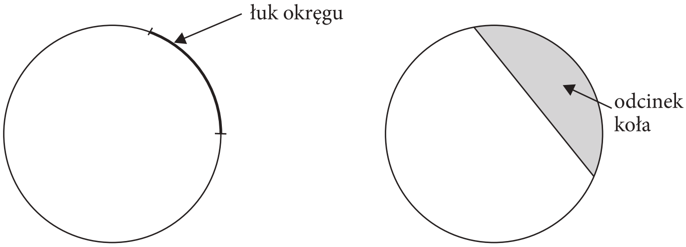


Koło o środku w punkcie *S* i promieniu *r* to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu *S* jest równa promieniowi lub jest mniejsza od promienia.
Środek koła należy do koła.



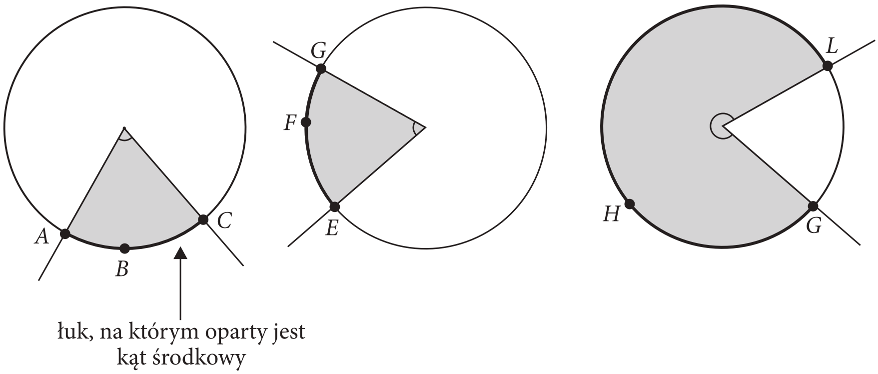




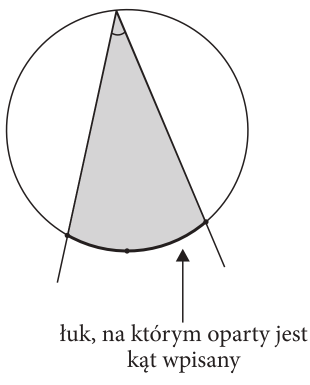


KĄTY W KOLE

Kąty środkowe – wierzchołek każdego z tych kątów jest środkiem koła.



Kąt wpisany w okrąg – wierzchołek leży na okręgu, a ramiona zawierają cięciwy.



ZADANIE 2

Pewniak na teście

Oblicz pole i obwód koła o promieniu 3 cm.

$r = 3$ cm

$\boldsymbol{P = \pi r^2}$

W miejsce r podstawiamy liczbę 3.

$P = \pi \cdot 3^2$

$P = 9\pi$ cm^2

pole koła

$\boldsymbol{l = 2\pi r}$

$l = 2\pi \cdot 3$ cm

$l = 6\pi$ cm

obwód koła

Odp.: Pole koła wynosi 9π cm^2, a obwód 6π cm.

ZADANIE 3

Pewniak na teście

Jaki promień ma koło o obwodzie 10 cm?

Dane:
$l = 10$ cm

Szukane:
$r = ?$

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{l = 2\pi r}$

Zamiast l podstawiamy liczbę 10.

$10 = 2\pi r \qquad / : 2\pi$

$$\frac{\cancel{10}^{5}}{{}_{1}\cancel{2}\pi} = r$$

$$r = \frac{5}{\pi} \text{ cm}$$

Odp.: Promień koła wynosi $\frac{5}{\pi}$ cm.

ZADANIE 4

Pewniak na teście

Oblicz pole i obwód koła o średnicy 5 cm.

Dane:
$d = 5$ cm

Szukane:
$P = ?$
$l = ?$

Rozwiązanie:

$$r = \frac{1}{2}d$$

Promień koła równy jest połowie średnicy.

ROZDZIAŁ V
PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA

INFORMACJE O PROPORCJONALNOŚCI

Proporcjonalnością prostą nazywamy taką zależność między dwiema wielkościami, że gdy jedna z nich rośnie ileś razy, druga rośnie tyle samo razy. Działa to też w drugą stronę: gdy jedna z wielkości maleje *n* razy, druga też maleje *n* razy. W proporcjonalności występuje jeszcze trzecia wartość. Jest ona wartością stałą i rozwiązując zadania, nie musimy jej znać. Proporcjonalnością prostą jest zależność na przykład między czasem jazdy a pokonaną drogą – przy założeniu, że prędkość jest stała.

PRZYKŁAD 1

$t_1 = 2$ h $\qquad s_1 = 120$ km
$t_2 = 4$ h $\qquad s_2 = 2 \cdot 120$ km $= 240$ km

Dwukrotny wzrost czasu jazdy (z 2 na 4 godz.) powoduje dwukrotny wzrost przebytej drogi. Nie musimy znać prędkości jazdy.

* * *

$t_1 = 2$ h $\qquad s_1 = 160$ km
$t_2 = 0{,}5$ h $\qquad s_2 = 160$ km $: 4 = 40$ km

Czterokrotne zmniejszenie czasu jazdy (z 2 na 0,5 godz.) powoduje czterokrotne zmniejszenie przebytej drogi.

Oczywiście można obliczyć drogę, obliczając wcześniej prędkość. W powyższych przykładach obliczenie prędkości nie stanowi problemu, ale w innych zadaniach już tak:

PRZYKŁAD 2

$t_1 = 2{,}25$ h $\qquad s_1 = 173{,}2$ km
$t_2 = 9$ h $\qquad s_2 = 4 \cdot 173{,}2$ km $= 692{,}8$ km

Tu obliczenie prędkości jest kłopotliwe. Ale wystarczy wiedzieć, że czterokrotny wzrost czasu jazdy powoduje czterokrotny wzrost przebytej drogi.

Proporcjonalnością prostą są też zależności między:
– wartością a ilością zakupionego towaru (przy stałej cenie),
– masą a objętością substancji (przy stałej masie jednostkowej),
– ilością porcji posiłków a liczbą osób (przy stałej racji żywności dla osoby) i wiele innych.

ZADANIA TEKSTOWE Z PROPORCJONALNOŚCIĄ PROSTĄ

ZADANIE 1

Do wyrobu 85 kg czekolady zużyto 38 kg miazgi kakaowej. Ile miazgi należy użyć do wyrobu 204 kg takiej samej czekolady?

Rozwiązanie:

$$\downarrow \begin{array}{lcl} 85 & \rightarrow & 38 \\ 204 & \rightarrow & x \end{array} \downarrow$$

Dane najwygodniej jest zapisywać w dwóch kolumnach, w każdej umieszczając odpowiadające sobie wartości: masę czekolady pod masą czekolady, masę miazgi pod masą miazgi – wprowadzając niewiadomą. Strzałki po bokach wskazują kierunek wzrostu wartości.

$x \cdot 85 = 204 \cdot 38$

Następnie układamy równanie dwóch iloczynów, „na krzyż", tzn. czynnik z lewej strony górnego wiersza mnożymy z czynnikiem z prawej strony dolnego wiersza i odwrotnie.

$85x = 7\,752 \qquad / : 85$
$x = 91{,}2$

Wygodnie jest umieścić iloczyn z niewiadomą po lewej stronie równania.

Odp.: Do wyrobu 204 kg takiej czekolady trzeba zużyć 91,2 kg miazgi kakaowej.

ZADANIE 2

Pewniak na teście

Taśmy o długości 175 cm wystarczy na wykonanie 35 kokardek. Ile takich samych kokardek można zrobić z 42 m taśmy?

Rozwiązanie:

$$\downarrow \begin{array}{lcl} 1{,}75 & \rightarrow & 35 \\ 42 & \rightarrow & x \end{array} \downarrow$$

Długość pod długością, liczba pod liczbą, ale UWAGA! Konieczna jest zamiana cm na m lub odwrotnie. Wartości zapisywane pod sobą muszą być wyrażone w tych samych jednostkach!

$x \cdot 1{,}75 = 42 \cdot 35$
$1{,}75x = 1\,470 \qquad / : 1{,}75$
$x = 840$

Iloczyn z niewiadomą po lewej stronie.

Odp.: Z 42 m taśmy można wykonać 840 kokardek.

Pewniak na teście

ZADANIE 3

Za 7,2 kg mandarynek zapłacono 39 zł 60 gr. Ile takich samych mandarynek kupiono za 13 zł 20 gr?

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{l} \uparrow 7{,}2 \rightarrow 39{,}6 \uparrow \\ x \rightarrow 13{,}2 \end{array}$$

Masa pod masą, wartość pod wartością.

$x \cdot 39{,}6 = 7{,}2 \cdot 13{,}2 \qquad / : 39{,}6$

$$x = \frac{7{,}2 \cdot \cancel{13{,}2}^{1}}{\cancel{39{,}6}_{3}} = \frac{7{,}2}{3} = 2{,}4$$

Odp.: Za kwotę 13 zł 20 gr kupiono 2,4 kg takich mandarynek.

Pewniak na teście

ZADANIE 4

Przy leśniczówce rośnie 7 dębów oraz jesiony. Leśniczy posadził jeszcze 5 dębów oraz 10 jesionów. Stosunek liczby drzew dębów do jesionów pozostał taki sam. Ile jesionów rośnie teraz przy leśniczówce?

Rozwiązanie:

dęby	7	12
jesiony	x	$x + 10$

Zapisujemy dane w tabeli:
dęby: 7 + 5 = 12
jesiony: o 10 więcej, czyli $x + 10$.

$$\frac{7}{x} = \frac{12}{x+10}$$

Układamy równanie.

$12x = 7(x + 10)$

$12x = 7x + 70 \qquad / - 7x$

$12x - 7x = 70$

$5x = 70 \qquad / : 5$

$x = 14$

$14 + 10 = 24$

Na początku przy leśniczówce rosło 14 jesionów. Teraz jest ich o 10 więcej.

Odp.: Teraz przy leśniczówce rosną 24 jesiony.

ROZDZIAŁ VI
ODCZYTYWANIE DANYCH I ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

Statystyka opisowa to dział statystyki zajmujący się metodami opisu danych uzyskanych podczas badania statystycznego. Statystykę opisową stosuje się zazwyczaj jako pierwszy i podstawowy krok w analizie zebranych danych.

SPOSOBY PREZENTOWANIA DANYCH. WYSZUKIWANIE INFORMACJI

Tabela 1. Powierzchnia i ludność świata

WYSZCZEGÓLNIENIE	powierzchnia w mln km^2	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2012	
		ludność w milionach							na 1 km^2
ŚWIAT	**136,1**[a]	**3038**	**3691**	**4449**	**5321**	**6128**	**6916**	**7080**	**52**
Europa[b]	23,0	604	657	695	723	729	740	742	32
Azja[c]	31,9	1708	2129	2634	3213	3717	4165	4255	133
Afryka	30,3	287	366	478	630	808	1031	1084	36
Ameryka Północna	21,8	204	231	255	282	315	347	352	16
Ameryka Południowa i Środkowa	20,5	220	288	364	445	526	596	610	30
Australia i Oceania[d]	8,6	16	20	23	27	31	37	38	4

[a] Powierzchnia lądów bez terytoriów zamieszkanych przez mniej niż 50 osób, np. niezamieszkane obszary polarne.

[b] Łącznie z azjatycką częścią Rosji.

[c] Łącznie z europejską częścią Turcji.

[d] Bez Hawajów zaliczanych do Ameryki Północnej.

Źródło: „Demographic Yearbook 2011", „World Population Prospect, The 2011 Revision Population Database".

Prezentowanie danych w tabeli nie wymaga instruowania. Pamiętaj, żeby tabela była czytelna i przejrzysta.

ZADANIE 1

Korzystając z danych zamieszczonych w Tabeli 1, wskaż kontynenty, na których gęstość zaludnienia jest mniejsza niż w Europie.

Rozwiązanie:

Australia i Oceania, Ameryka Północna, Ameryka Południowa i Środkowa.

ZADANIE 2

Korzystając z danych zamieszczonych w Tabeli 1, uporządkuj kontynenty od najmniejszej do największej powierzchni.

Rozwiązanie:

Australia i Oceania, Ameryka Południowa i Środkowa, Ameryka Północna, Europa, Afryka, Azja.

Tabela 2. Urodzenia w Polsce

	Kraj			Miasta			Wieś		
Roczniki	Ogółem	Chłopcy	Dziewczęta	Ogółem	Chłopcy	Dziewczęta	Ogółem	Chłopcy	Dziewczęta
1980	701553	360202	341351	386615	198378	188237	314938	161824	153114
1990	551660	283723	267937	294579	151785	142794	257081	131938	125143
2000	380476	195953	184523	209453	108183	101270	171023	87770	83253
2010	415030	215324	199706	242900	125775	117125	172130	89549	82581
2011	390069	200795	189274	226614	116815	109799	163455	83980	79475
2012	387858	199550	188308	224699	115629	109070	163159	83921	79238

Źródło: Rocznik Demograficzny 2013, GUS – TABL. 56. URODZENIA.

ZADANIE 3

Korzystając z danych zamieszczonych w tabeli 2, odpowiedz na pytania:

a) w których dziesięcioletnich odstępach liczba urodzeń w Polsce wzrosła?
b) w których dziesięcioletnich odstępach liczba urodzeń w Polsce spadła najbardziej?
c) w których dziesięcioletnich odstępach liczba urodzeń w Polsce spadła najmniej?
d) w których dziesięcioletnich odstępach i w której badanej grupie tendencja w liczbie urodzeń chłopców i dziewcząt była odwrotna?
e) gdzie rodzi się więcej dzieci – w miastach czy na wsiach?

Rozwiązanie:

a) w 2000–2010

b) w 1990–2000

c) w 1980–1990, w latach 2011–2012 spadek liczby urodzeń był mniejszy, ale nie jest to odstęp dziesięcioletni!

d) w kategorii „wieś" w odstępie 2000–2010 liczba urodzeń chłopców wzrosła, a liczba urodzeń dziewcząt zmalała

e) więcej dzieci rodzi się w miastach.

ZADANIE 4

Pewniak na teście

Poniższa tabela przedstawia wyniki ankiety przeprowadzonej wśród uczniów klas siódmych województwa pomorskiego: „Jaki przedmiot szkolny uważasz za najciekawszy?". Każdy z ankietowanych mógł wskazać tylko jeden przedmiot.

Przedmiot	Uczennice	Uczniowie	Razem
j. angielski	20	11	31
j. polski	12	6	18
historia	36	29	65
fizyka	2	38	40
chemia	4	10	14
geografia	7	6	13
muzyka	19	0	13
Razem	100	100	200

a) Który przedmiot został wskazany przez co najmniej $\frac{1}{3}$ uczniów?
b) Który przedmiot wybrała co piąta uczennica?
c) Który przedmiot najczęściej wskazywali ankietowani?
d) Który przedmiot wskazywały uczennice dwukrotnie częściej niż uczniowie?
e) Jaki procent ankietowanych wskazywało fizykę jako najciekawszy przedmiot?

Rozwiązanie:

a) $\frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \approx 34$

Co najmniej $\frac{1}{3}$ z liczby 100 uczniów to 34 lub więcej.

Odp.: Ponad 34 uczniów wskazało fizykę (przedmiot ten został wskazany 38 razy).

b) 100 : 5 = 20

Co piąta uczennica – czyli 20 uczennic.

Odp.: Co piąta uczennica wskazała język angielski jako najciekawszy.

Pewniak na teście

ZADANIE 5

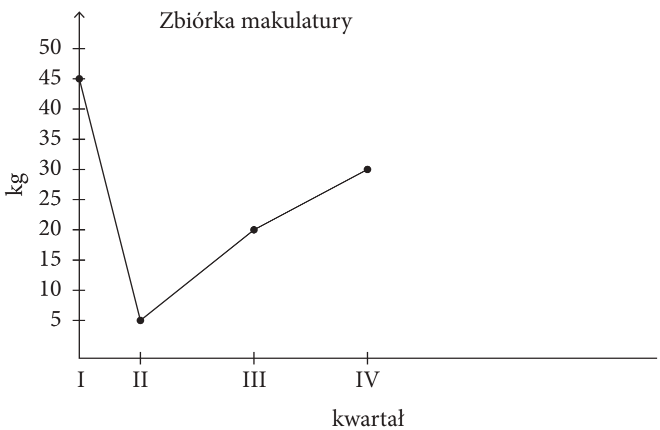
Czy komentarze pod wykresami są zgodne z tym, co można z nich odczytać? Zaznacz właściwą odpowiedź.

a)

Liczba wypożyczonych książek w grudniu wzrosła o 10% w porównaniu z listopadem.

Prawda ☐ Fałsz ☐

b)



W czwartym kwartale ilość zebranej makulatury spadła ponad dwukrotnie w stosunku do kwartału I.

Prawda ☐ Fałsz ☐

Rozwiązanie:

a) W listopadzie z blibilioteki szkolnej wypożyczono 100 książek, w grudniu 110.

$110 - 100 = 10$

O tyle książek więcej wypożyczono w grudniu.

ZADANIE 2

Korzystając z wykresu 2, odpowiedz na pytanie: jaki procent zatrudnionych w tej firmie stanowią pracownicy marketingu?

Rozwiązanie:

100% – (10,5% + 18% + 49%) = 100% – 77,5% = 22,5%

PODSTAWOWE POJĘCIA STATYSTYKI

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna liczb rzeczywistych to liczba określona wzorem:

$$x_{śr} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Średniej arytmetycznej używamy wówczas, kiedy opracowując dane statystyczne, chcemy scharakteryzować cały ich zestaw. Średniej arytmetycznej możemy używać, gdy wszystkie dane mają takie samo znaczenie (wagę).

Tabela 1. Tabela zawiera wyniki pomiarów temperatury powietrza, jakich dokonywano o tej samej godzinie od poniedziałku do niedzieli.

Pon.	Wt.	Śr.	Czw.	Pt.	Sob.	Niedz.
–15°C	–18°C	–20°C	–18°C	–19°C	–17°C	–19°C

ZADANIE 1

Pewniak na teście

Korzystając z tabeli 1, oblicz średnią temperaturę tego tygodnia.

Rozwiązanie:

$$t_{śr} = \frac{-15°C + (-18°C) + (-20°C) + (-18°C) + (-19°C) + (-17°C) + (-19°C)}{7} =$$

$$= \frac{-126°C}{7} = -18°C$$

Dodajemy wszystkie temperatury i dzielimy przez liczbę dni.

ZADANIE 2

Uczniowie klasy ósmej napisali kartkówkę. Oceny bardzo dobre uzyskało 30% uczniów, oceny dobre 40% uczniów, 3 uczniów uzyskało oceny dostateczne, a pozostali oceny dopuszczające. Średnia wszystkich ocen z kartkówki wynosi 3,8. Ilu uczniów otrzymało poszczególne oceny?

Rozwiązanie:

x – liczba uczniów w klasie

ROZDZIAŁ VII
WPROWADZENIE DO KOMBINATORYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

KOMBINATORYKA

Kombinatoryka jest działem matematyki, który znajduje odpowiedzi na wszystkie możliwe wersje pytania „Ile?". Na przykład:
– ile podzbiorów sześcioelementowych można utworzyć w zbiorze 49 elementów, czyli ile różnych szóstek można skreślić w Lotto?
W mniej złożonych zadaniach na pytanie „Ile?" można odpowiedzieć w prosty sposób, nie dokonując skomplikowanych obliczeń.

Pewniak na teście

PRZYKŁAD 1

Ile jest wyników (w domyśle różnych) podczas rzutu sześcienną kostką do gry, której pola opisane są liczbami od 1 do 6?

Odp.: Możliwe wyniki to wylosowanie 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6. A więc jest sześć wyników.

PRZYKŁAD 2

Ile jest (różnych) wyników podczas rzutu monetą?
Odpowiedź jest jeszcze prostsza.

Odp.: Można wylosować orła lub reszkę. A więc są dwa wyniki.

Zadania bywają czasem bardziej skomplikowane. Na przykład przy dwukrotnym rzucie monetą lub rzucie dwiema monetami.

PRZYKŁAD 3

Ile jest wyników podczas dwukrotnego rzutu monetą?

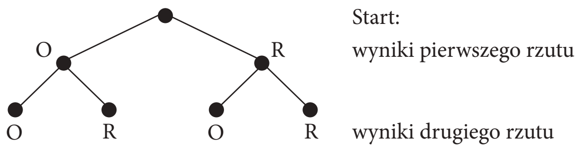
Wypiszemy je wprowadzając oznaczenia: O – wypadnięcie orła, R – wylosowanie reszki.

Wyniki:	I losowanie: O,	(zakładamy jako jedną z dwóch możliwości),
	II losowanie: O lub R,	(niezależnie od wyniku I rzutu),
lub:	I losowanie: R,	(jeśli nie orzeł, jak założyliśmy wcześniej, to musi być reszka),
	II losowanie: O lub R.	(niezależnie od wyniku I rzutu).

Ostatecznie więc, wypisując wyniki w postaci par wyników mamy: (O, O) lub (O, R) lub (R, O) lub (R, R).

Odp.: Podczas dwukrotnego rzutu monetą możliwe są cztery wyniki.

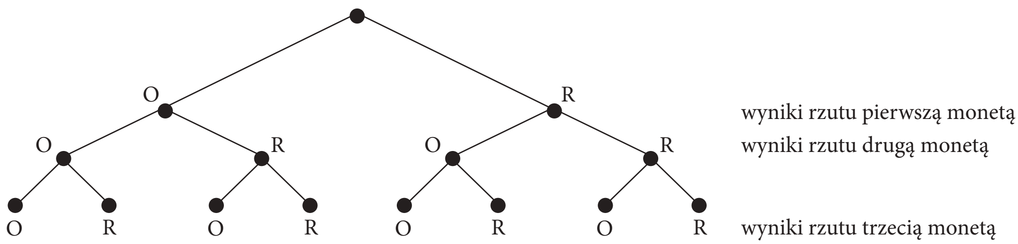
Wyniki można ilustrować drzewkiem. Zilustrujmy sytuację z przykładu 3.



Liczba punktów na najniższym piętrze to liczba wyników. Spisujemy je schodząc z góry na dół, od najwyższego rozgałęzienia (na poziomie „Start”) do każdego z najniższych punktów. Wyniki: (O, O), (O, R), (R, O), (R, R).

PRZYKŁAD 4

Ile jest wyników podczas rzutu trzema monetami?



Zapisujemy wyniki (od lewej strony): (O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (O, R, R), (R, O, O), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R).

Odp.: Jest osiem wyników rzutu trzema monetami.

Tak samo wyglądałaby odpowiedź na pytanie: ile jest wyników trzykrotnego rzutu monetą. Poziom „wyniki rzutu pierwszą monetą” nazywałby się wówczas „wyniki pierwszego rzutu”, poziom „wyniki rzutu drugą monetą” nazywałby się „wyniki drugiego rzutu” itd.

Rysowanie drzewka daje możliwość prześledzenia i zapisania wyników. Czasem bywa to trudne, a nawet niemożliwe.

Pewniak na teście

ZADANIE 4

Ania zamierza w najbliższym tygodniu iść na basen. Nie może tego zrealizować w poniedziałek z powodu zajęć gry na instrumencie. Ponumerowała dni od wtorku do niedzieli cyframi od 1 do 6 i chce wylosować dzień, w którym pójdzie na basen, rzucając sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
A – Ania wylosuje niedzielę.
B – Dniem wyjścia na basen nie będzie wtorek.
C – Dzień wyjścia na basen wypadnie nie wcześniej niż w piątek.

Rozwiązanie:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad L(\Omega) = 6$

Wypisujemy wszystkie wyniki rzutu sześcienną kostką do gry.

$A = \{6\} \qquad L(A) = 1$

Wypisujemy wyniki zdarzenia: wypadła liczba 6 (niedziela).

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \qquad L(B) = 5$

Wypisujemy wszystkie wyniki zdarzenia: wypadł dowolny dzień oprócz wtorku, czyli środa, czwartek, piątek, sobota, niedziela.

$$P(B) = \frac{L(B)}{L(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

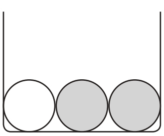
$B = \{4, 5, 6\} \qquad L(C) = 3$

Wypisujemy wszystkie wyniki zdarzenia, wypadł dzień nie wcześniejszy niż piątek, czyli piątek, sobota lub niedziela.

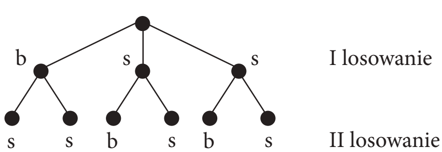
$$P(C) = \frac{L(C)}{L(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ZADANIE 5

Z urny przedstawionej na rysunku losujemy bez zwracania dwie kule. Określ zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego. Podaj zbiory zdarzeń sprzyjających i oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
A – obie kule będą białe,
B – obie kule będą szare,
C – kule będą innego koloru,
D – co najmniej jedna kula będzie szara.



Rozwiązanie:



b – biała kula, s – szara kula.

$\Omega = \{bs, bs, sb, ss, sb, ss\}$ $L(\Omega) = 6$

$A = \{\varnothing\}$ $L(A) = 0$

Nie istnieje zdarzenie sprzyjające wylosowaniu dwóch białych kul.

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

zdarzenie niemożliwe

Wylosowanie dwóch kul białych jest niemożliwe.

$B = \{ss, ss\}$ $L(B) = 2$

$$P(B) = \frac{L(B)}{L(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch szarych kul wynosi $\frac{1}{3}$.

$C = \{bs, bs, sb, sb\}$ $L(C) = 4$

$$P(C) = \frac{L(C)}{L(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów wynosi $\frac{2}{3}$.

$D = \{bs, bs, sb, ss, sb, ss\}$ $L(D) = 6$

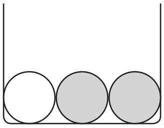
$$P(D) = \frac{L(D)}{L(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1$$

zdarzenie pewne

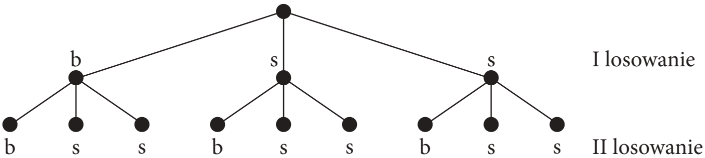
Wylosowanie co najmniej jednej kuli szarej jest zdarzeniem pewnym.

ZADANIE 6 (Porównaj z zadaniem 5)

Z urny przedstawionej na rysunku losujemy dwie kule ze zwracaniem, czyli w taki sposób, że wylosowana kula wraca do urny i bierze udział w kolejnym losowaniu. Określ zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego. Podaj zbiory zdarzeń sprzyjających i oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
A – obie kule będą białe,
B – obie kule będą szare,
C – kule będą innego koloru,
D – co najmniej jedna kula będzie szara.



Rozwiązanie:



b – biała kula, s – szara kula.

ISBN 978-83-7517-884-5

wydawnictwo edukacyjne GREG

Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B • 31-979 Kraków
www.greg.pl