klasa 7
szkoła
podstawowa

nowa podstawa programowa

MATEMATYKA
korepetycje

Pewniak na teście

zadania takie,
jak na testach i sprawdzianach

rozwiązania krok po kroku

wydawnictwo **edukacyjne** GREG®

Korepetycje matematyka kl. 7

Autor:
Roman Gancarczyk
(wykorzystano materiały autorstwa Lucyny Butowskiej,
Grażyny Matachowskiej)

Nadzór merytoryczny:
Lucyna Butowska, Zofia Daszczyńska, Bernadetta Szkarłat

Korekta:
Agnieszka Antosiewicz, Agata Tondera, Maria Zagnińska

Okładka:
Pracownia Słowa

ISBN: 978-83-7517-886-9

Kraków
Wydanie II rozszerzone

Wydawnictwo GREG®
31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B
tel. (12) 680 15 50
www.greg.pl

Księgarnia internetowa: www.greg.pl

Pewniak na teście Uwaga! Będzie na teście!

Spis treści

ROZDZIAŁ I POTĘGI O PODSTAWACH WYMIERNYCH

Potęga o wykładniku naturalnym 5
Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych podstawach 12
Potęgowanie potęgi 14
Mnożenie i dzielenie potęg o tym samym wykładniku 14
Działania na potęgach 16
Notacja wykładnicza 19

ROZDZIAŁ II PIERWIASTKI

Wiadomości o pierwiastkach 22
Działania na pierwiastkach 25
Porównywanie wyrażeń arytmetycznych zawierających niewymierności 33

ROZDZIAŁ III WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Zapisywanie i odczytywanie wyrażeń algebraicznych 36
Zapisywanie wyrażeń algebraicznych 37
Wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego 47
Jednomiany 53
Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych 55
Mnożenie sum algebraicznych przez liczby 59
Dzielenie sum algebraicznych przez liczby 61
Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne 65
Mnożenie sum algebraicznych 67

ROZDZIAŁ IV RÓWNANIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Równania 69
Rozwiązywanie równań 75
Zadania tekstowe 83
Wyznaczanie wskazanej wartości ze wzorów 103

ROZDZIAŁ V OBLICZENIA PROCENTOWE

Wiadomości o procentach 110
Obliczanie procentu danej liczby 112
Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent 120
Jaki to procent? 125
Podsumowanie 130
Obliczenia praktyczne 131
Obliczanie odsetek 133

ROZDZIAŁ VI FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie 136
Proste i odcinki 137
Kąty 138
Trójkąty 144
Przystawanie trójkątów 153
Trójkąty prostokątne 156
  Twierdzenie Pitagorasa 156
  Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do rozwiązywania zadań 161
Wielokąty foremne 169
  Trójkąt równoboczny 169
  Czworokąt równoboczny – kwadrat 169
  Pięciokąt foremny 169
  Sześciokąt foremny 170
  Konstrukcja sześciokąta foremnego 174

ROZDZIAŁ VII OŚ LICZBOWA. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE

Zbiory liczb na osi liczbowej 175
Układ współrzędnych na płaszczyźnie 176
Zaznaczanie punktów w układzie współrzędnych 177
Odczytywanie długości odcinków 180
Środek odcinka 182
Końce odcinka 183

ROZDZIAŁ I
POTĘGI O PODSTAWACH WYMIERNYCH

POTĘGA O WYKŁADNIKU NATURALNYM

Potęgowanie to mnożenie określonej liczby jednakowych czynników.
Potęga to skrócony zapis mnożenia jednakowych czynników:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Zamiast pisać: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, piszemy: 2^5 – czytamy: dwa do potęgi piątej.

wykładnik potęgi

↓

$$a^n$$

↑podstawa potęgi

$\boldsymbol{a^1 = a}$ np. $5^1 = 5$, $(-10)^1 = -10$

$\boldsymbol{a^0 = 1}$ dla $\boldsymbol{a \neq 0}$

np. $2^0 = 1$ – czytamy: dwa do potęgi zerowej

$15^0 = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Potęga o wykładniku zerowym zawsze wynosi 1.

$\boldsymbol{0^n = 0}$ dla $\boldsymbol{n \neq 0}$

Zero podniesione do potęgi *n* zawsze wynosi 0.

np. $0^5 = 0$, $0^2 = 0$

$3 \cdot 3 = 3^2$ – czytamy: kwadrat liczby trzy
lub trzy do kwadratu
lub druga potęga liczby trzy
lub trzy do potęgi drugiej

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ – czytamy: sześcian liczby pięć
lub pięć do sześcianu
lub pięć do potęgi trzeciej
lub trzecia potęga liczby pięć

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)^4$ – czytamy: minus jeden do potęgi czwartej
lub czwarta potęga liczby minus jeden

$2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot 2x = (2x)^5$ – czytamy: piąta potęga liczby $2x$

PRZYKŁADY

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$(0{,}1)^4 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0001$

$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Potęga liczby nieujemnej jest liczbą nieujemną (liczby nieujemne to liczby dodatnie i liczba 0).

$(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$

$(-) \cdot (-) = (+)$

$-6^2 = -6 \cdot 6 = -36$

W zapisie bez nawiasu podstawą jest liczba „6", a znak „–" należy przepisać po wykonaniu działania.

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

$(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

$(-) \cdot (+) = (-)$

$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

$(-1)^7 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

$(-1)^{379} = -1$

$(-1)^{406} = 1$

Nie ma potrzeby obliczać, trzeba tylko rozstrzygnąć kwestię znaku.

Zauważ, że jeżeli **liczbę ujemną** podnosimy do potęgi o **wykładniku parzystym** (tzn. 2, 4, 6, 8, ...), to wynik jest **dodatni,** jeżeli wykładnik jest **nieparzysty,** to wynik potęgowania jest **ujemny.**

ZADANIE 1

Zapisz iloczyny w postaci potęgi:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$
$= 3^4$

Przeliczamy liczbę czynników.

b) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}5) =$

$= (-0{,}5)^3$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^5$

d) $(-3x) \cdot (-3x) \cdot (-3x) \cdot (-3x) \cdot (-3x) \cdot (-3x) =$

$= (-3x)^6$

ZADANIE 2

Pewniak na teście

Przedstaw wyrażenia w postaci jednej potęgi:
a) $32 \cdot 8 \cdot 2^3$ b) $125 \cdot 5^3 : 5^2$ c) $81 \cdot 3^7 : 3^4$

Rozwiązanie:

a) $32 \cdot 8 \cdot 2^3 =$

$= 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{11}$

$32 = 2^5$
$8 = 2^3$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $125 \cdot 5^3 : 5^2 =$

$= 5^3 \cdot 5^3 : 5^2 = 5^4$

$125 = 5^3$
$a^m : a^n = a^{m-n}$

c) $81 \cdot 3^7 : 3^4 = 3^4 \cdot 3^7 : 3^4 = 3^7$

ZADANIE 3

Pewniak na teście

Zapisz poniższe liczby w postaci potęgi liczby 10.
a) 100^6 b) $(1000)^{14}$ c) 1000^{100} d) $(100^2)^8$

Rozwiązanie:

$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

a) $100^6 = (10^2)^6 = 10^{12}$

b) $(1000)^{14} = (10^3)^{14} = 10^{42}$

c) $1000^{100} = (10^3)^{100} = 10^{300}$

d) $(100^2)^8 = 100^{16} = (10^2)^{16} = 10^{32}$

ZADANIE 4

Oblicz:

a) $3^3 =$

$= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

ROZDZIAŁ II
PIERWIASTKI

WIADOMOŚCI O PIERWIASTKACH

stopień pierwiastka

$$\sqrt[n]{a}$$

symbol pierwiastka

liczba podpierwiastkowa

Pierwiastkowaniem nazywamy w matematyce operację odwrotną względem potęgowania, czyli operację polegającą na poszukiwaniu liczb, które podniesione do n-tej potęgi dają liczbę podpierwiastkową, na przykład:

$$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = 2 \quad \text{bo} \quad 2^2 = 4$$

PIERWIASTEK ARYTMETYCZNY

Pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej a to taka liczba nieujemna b, która podniesiona do kwadratu daje liczbę podpierwiastkową a, czyli:

$$\sqrt{a} = b, \quad \text{bo} \quad b^2 = a \qquad \left.\begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{matrix}\right\} a \text{ i } b \text{ to liczby nieujemne}$$

Jeżeli przy symbolu pierwiastka stopień pierwiastka został opuszczony w zapisie, oznacza to, że mamy do czynienia z pierwiastkiem kwadratowym.

WAŻNE

Zauważ, że zarówno liczba podpierwiastkowa a, jak i liczba b (wynik pierwiastkowania) muszą być liczbami dodatnimi lub zerem.

Uwaga! Liczby nieujemne to wszystkie liczby dodatnie plus liczba zero.

stopień pierwiastka

$$\sqrt[3]{a}$$

symbol pierwiastka trzeciego stopnia (lub pierwiastka sześciennego)

liczba podpierwiastkowa

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby *a* nazywamy taką liczbę *b*, która podniesiona do trzeciej potęgi daje liczbę podpierwiastkową *a*, czyli:

$$\sqrt[3]{a} = b, \quad \text{bo} \quad b^3 = a$$

Dla wygody, zwłaszcza przy rozwiązywaniu następnych zadań, dobrze jest posłużyć się tabelą zawierającą kwadraty i sześciany kilkunastu liczb naturalnych:

n	n^2	n^3
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1 000
11	121	1 331
12	144	1 728
13	169	2 197
14	196	2 744
15	225	3 375

Tabelą możemy się posłużyć zarówno do obliczania potęg, jak i „obliczania" pierwiastków.

Chcąc znaleźć $\sqrt{196}$, odszukujemy liczbę 196 w kolumnie zawierającej kwadraty liczb, oznaczonej n^2, i z kolumny oznaczonej n, w tym samym wierszu, odczytujemy liczbę 14, która podniesiona do drugiej potęgi daje 196. A więc: $\sqrt{196} = 14$.

W ten sam sposób postępujemy z pierwiastkami trzeciego stopnia: chcąc znaleźć $\sqrt[3]{1728}$, odszukujemy tę liczbę, tym razem w kolumnie zawierającej sześciany liczb, oznaczonej n^3, a z kolumny oznaczonej n, w tym samym wierszu, odczytujemy liczbę 12. Oznacza to, że: $\sqrt[3]{1728} = 12$.

PRZYKŁADY

$\sqrt{4} = 2$ bo $2^2 = 4$

$\sqrt{9} = 3$ bo $3^2 = 9$

$\sqrt{25} = 5$ bo $5^2 = 25$

$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ bo $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$\sqrt{0} = 0$ bo $0^2 = 0$

$\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ bo $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ bo $0{,}1^2 = 0{,}01$

$\sqrt[3]{27} = 3$ bo $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{8} = 2$ bo $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$ bo $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ bo $0{,}1^3 = 0{,}001$

$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ bo $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

$\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ bo $(2{,}5)^2 = 6{,}25$

$\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ bo $0{,}7^2 = 0{,}49$

$\sqrt{\frac{400}{81}} = \frac{20}{9}$ bo $\left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{400}{81}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \frac{1}{6}$ bo $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

$\sqrt{11\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$ bo $\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$

Poznane dotychczas umiejętności wykorzystamy do obliczania pierwiastków z liczb całkowitych, które na ostatnich pozycjach mają cyfry zero:

$\sqrt{16000000} = 4000$

Wiemy, że $\sqrt{16} = 4$, pozostaje ustalić liczbę zer na końcu pierwiastka. Robimy to, dzieląc liczbę zer na końcu liczby pierwiastkowanej (tu 6) przez stopień pierwiastka (tu 2), czyli $6 : 2 = 3 \rightarrow$ dopisujemy trzy zera.

$\sqrt[3]{8000000} = 200$

Tu działa ta sama zasada, jak w pierwiastkach drugiego stopnia.

Zasada ta dotyczy również ułamków dziesiętnych, z tą różnicą, że tu obliczamy liczbę miejsc po przecinku:

$\sqrt{0{,}000025} = 0{,}005$

$\sqrt{25} = 5$, obliczamy liczbę miejsc po przecinku, $6 : 2 = 3 \rightarrow$ liczbę 5 należy zapisać na trzecim miejscu po przecinku.

$\sqrt{0{,}0049} = 0{,}07$

Analogicznie.

$\sqrt[3]{0{,}000027} = 0{,}03$

I jak wyżej.

W dotychczasowych przykładach pierwiastki kwadratowe i sześcienne z danej liczby były liczbami wymiernymi.

Nie zawsze tak jest, np.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nie ma takiej liczby wymiernej, która podniesiona do kwadratu daje 2, 3, 5.

Liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ itd. są liczbami niewymiernymi (także $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$ itd.).

Liczbami niewymiernymi są też liczby $\sqrt{0{,}036}$ lub $\sqrt[3]{800}$, których liczba zer na końcu lub liczba miejsc po przecinku nie są podzielne przez stopień pierwiastka.

$\sqrt{0{,}025} \in NW$

$\sqrt{16000} \in NW$

$\sqrt[3]{0{,}00027} \in NW$

$\sqrt[3]{80000} \in NW$

Takie pierwiastki należą do zbioru liczb niewymiernych i nie będziemy ich obliczać.

Czasem będą Ci potrzebne przybliżenia niektórych liczb niewymiernych.

Warto więc pamiętać:

$\mathbf{\sqrt{2} \approx 1{,}41}$

$\mathbf{\sqrt{3} \approx 1{,}73}$

$\mathbf{\sqrt{5} \approx 2{,}24}$

Znak $\approx$ czytamy: równa się w przybliżeniu.

DZIAŁANIA NA PIERWIASTKACH

Dla $a \geq 0$ zachodzą równości:

$\sqrt{a^2} = a$ $\qquad$ $\sqrt[3]{a^3} = a$

$(\sqrt{a})^2 = a$ $\qquad$ $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

$\uparrow$

Kwadrat pierwiastka kwadratowego równa się liczbie podpierwiastkowej.

Np.

$\sqrt{5^2} = 5$ $\qquad$ $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$

$(\sqrt{2})^2 = 2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5^3} = 5$

ROZDZIAŁ III
WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

ZAPISYWANIE I ODCZYTYWANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

Wyrażenia, w których występują liczby i litery połączone znakami działań i nawiasami, nazywamy wyrażeniami algebraicznymi.

Np.

$$2 + a, \qquad 3x - 5y, \qquad y^2, \qquad \frac{1}{2}ah, \qquad -\frac{3x}{4}.$$

Uwaga: *wyrażenie $3 \cdot x$ oznacza to samo co $3x$ (kropkę jako znak mnożenia opuszczamy); $5 \cdot (m + n)$ oznacza to samo co $5(m + n)$.*

Nazwa wyrażenia algebraicznego pochodzi od ostatniego działania, które należy wykonać zgodnie z kolejnością działań.

Przypomnienie: najpierw wykonujemy działania w nawiasach, potem potęgowanie i pierwiastkowanie, następnie mnożenie i dzielenie, na końcu dodawanie i odejmowanie.

WYRAŻENIE ALGEBRAICZNE		JEGO NAZWA
$a + b$	–	suma liczb a i b (litery zastępują liczby)
$a - b$	–	różnica liczb a i b
$x \cdot y$	–	iloczyn liczb x i y
$m : 2$	–	iloraz (bo dzielenie) liczby m przez 2
x^2	–	kwadrat liczby x
y^3	–	sześcian liczby y
$-2xy$	–	iloczyn liczb -2, x i y
$\frac{a}{5}$	–	iloraz (kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia) liczby a przez 5

Uwaga: w kółeczkach zaznaczono, w jakiej kolejności będziemy wykonywać działania, jeśli za zmienne (litery) podstawimy liczby.

$\overset{\textcircled{1}}{6a} \overset{\textcircled{3}}{+} \overset{\textcircled{2}}{2b}$ – suma (bo ostatnim działaniem do wykonania będzie dodawanie) iloczynów $6a$ i $2b$

$(a \overset{\textcircled{1}}{+} b)^{\overset{\textcircled{2}}{2}}$ – kwadrat sumy liczb a i b (bo jeśli za niewiadome podstawimy liczby, to ostatnim działaniem do wykonania będzie potęgowanie)

$(a \overset{\textcircled{1}}{-} b)^{\overset{\textcircled{2}}{2}}$ – kwadrat różnicy liczb a i b

$(a \overset{\textcircled{1}}{+} b) \overset{\textcircled{3}}{\cdot} (x \overset{\textcircled{2}}{-} y)$ – iloczyn (bo mnożenie jest ostatnim w kolejności działaniem do wykonania) sumy $a + b$ i różnicy liczb x i y

$\overset{\textcircled{1}}{3x} \overset{\textcircled{3}}{+} \overset{\textcircled{2}}{5y}$ – suma (dodawanie będzie wykonywane na końcu)

$\sqrt{4a}$ – pierwiastek z iloczynu liczby 4 i a

$\overset{\textcircled{1}}{a^2} \overset{\textcircled{3}}{+} \overset{\textcircled{2}}{b^2}$ – suma kwadratów liczb a i b

ZAPISYWANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

W wyrażeniach algebraicznych występują liczby, litery i znaki działań.

ZADANIE 1

Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych. Liczbę róż w pewnej kwiaciarni oznaczymy literą x.

a) Lilii jest o 5 więcej.
$x + 5$

Wyrażenie „o 5 więcej" oznacza dodawanie.

b) Goździków jest 7 razy więcej.

$7 \cdot x = 7x$

„7 razy więcej" oznacza mnożenie.

Jeżeli mnożymy liczbę przez literę, znak „·" opuszczamy.

c) Storczyki stanowią $\frac{1}{4}$ róż.
$\frac{1}{4} \cdot x = \frac{1}{4}x$

Oznacza to $\frac{1}{4}$ z ilości róż.

d) Gerber jest 8 razy mniej.

$x : 8 = \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$

„8 razy mniej" oznacza dzielenie.

Znak : zamieniamy na kreskę ułamkową.
Dzielenie zamieniamy na mnożenie przez odwrotność drugiej liczby.

ZADANIE 2

Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych. Liczbę drzew liściastych w pewnym lesie oznaczamy literą k, a liczbę drzew iglastych literą l.

a) Ile jest wszystkich drzew w lesie?

Odp: $k + l$

Sumujemy ilość drzew liściastych z ilością drzew iglastych.

b) Dęby stanowią $\frac{1}{6}$ drzew liściastych. Ile jest dębów?

Odp: $\frac{1}{6}k$

Obliczamy $\frac{1}{6}$ z k, czyli mnożymy.

c) Sosen jest 9 razy mniej niż wszystkich drzew.

$k + l$

Liczba wszystkich drzew.

$\frac{k+l}{9} =$

Wyrażenie „razy mniej” oznacza dzielenie.

$= (k + l) \cdot \frac{1}{9} =$

$= \frac{1}{9}(k + l)$

Liczbę piszemy przed literami.

Odp: $\frac{1}{9}(k + l)$

d) Drzew liściastych jest więcej niż iglastych. O ile więcej?

Odp: $k - l$

Obliczamy „o ile więcej”, czyli odejmujemy.

ZADANIE 3

Towar waży (waga netto) 5 kg, opakowanie (tara) waży m kg. Ile waży towar wraz z opakowaniem (brutto)?

$(5 + m)$ kg

Dodajemy wagę towaru i jego opakowania.

Odp: Waga brutto wynosi $(5 + m)$ kg.

ZADANIE 4

1 kg cukru kosztuje 2,10 zł. Ile trzeba zapłacić za b kg?

$1 \cdot 2{,}10$ zł

Tyle trzeba zapłacić za 1 kg.

$2 \cdot 2{,}10$ zł

Tyle trzeba zapłacić za 2 kg.

$5 \cdot 2{,}10$ zł

Tyle zapłacimy za 5 kg.

$b \cdot 2{,}10$ zł $=$

Tyle zapłacimy za b kg.

$= 2{,}10b$ zł

Najpierw piszemy liczbę, potem literę, znak „·” pomijamy.

Odp: Za b kg cukru trzeba zapłacić $2{,}10b$ zł.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE SUM ALGEBRAICZNYCH

SUMY

$5 + 6$ $\quad 4 + 12$

$a + b$ $\quad a + (-c)$

$3x + 2y, \quad a + 2, \quad 3x + 2y + 7z$

Są to sumy algebraiczne.

$$\underbrace{4x + (-5)}_{\text{suma}} = \underbrace{4x - 5}_{\text{suma}}$$

Wyrażenie po lewej stronie jest sumą, więc wyrażenie po prawej też jest sumą.

$$-7k + (-3w) + (-6) = -7k - 3w - 6$$

Odejmowanie zastępujemy dodawaniem liczb przeciwnych.

Wyrazy z powyższego wyrażenia są następujące:

$-7k$,	**$-3w$,**	**-6**
↓	↓	↓
współczynnik liczbowy	współczynnik liczbowy	wyraz wolny (bez litery)

Wyrażenie	$3x$	$-2b$	y	$-u$	$\frac{1}{2}z^2$	$0{,}2ab$	$\frac{a}{3}$	$\frac{b}{5}$
Współczynnik liczbowy	3	-2	1	-1	$\frac{1}{2}$	$0{,}2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

y ma współczynnik liczbowy 1,
bo $y = 1 \cdot y = 1y$
$-u$ ma współczynnik liczbowy -1,
bo $-u = -1 \cdot u = -1u$

Suma algebraiczna	Wyrazy sumy (jednomiany)	Uproszczony zapis	
$2x + (-3y) + 2$	$2x, -3y, 2$	$2x - 3y + 2$	$+ (-3y) = -3y$
$-2a + b + (-5)$	$-2a, b, -5$	$-2a + b - 5$	$+ (-5) = -5$
$-6 + (-5k) + \frac{1}{2}l$	$-6, -5k, \frac{1}{2}l$	$-6 - 5k + \frac{1}{2}l$	$+ (-5k) = -5k$
$-5a + 3b + 7$	$-5a, 3b, 7$	$-5a + 3b + 7$	
$2x + (-y) + (-8z) + 3$	$2x, -y, -8z, 3$	$2x - y - 8z + 3$	$+ (-y) = -y$ $+ (-8z) = -8z$
$-3x + (-z) + 0{,}2$	$-3x, -z, 0{,}2$	$-3x - z + 0{,}2$	$+ (-z) = -z$
$-2a + b + (-c) + (-3)$	$-2a, b, -c, -3$	$-2a + b - c - 3$	$+ (-c) = -c$ $+ (-3) = -3$

ROZDZIAŁ IV
RÓWNANIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

RÓWNANIA

Równanie:

$$\underbrace{5x + 4}_{\substack{\text{lewa strona}\\ \text{równania}\\ \text{L}}} = \underbrace{10}_{\substack{\text{prawa strona}\\ \text{równania}\\ \text{P}}}$$

Liczbę spełniającą równanie nazywamy rozwiązaniem równania lub pierwiastkiem równania.
Liczba spełnia równanie, jeżeli po podstawieniu w miejsce niewiadomej czyni z tego równania zdanie prawdziwe (tzn. lewa strona równania równa się prawej).

Jak sprawdzić, czy liczba jest rozwiązaniem równania?

ZADANIE 1

Pewniak na teście

Które z poniższych równań spełnia liczba 2?
a) $2x(x - 1) = 3x - 1$
b) $x(2x + 1) = 2x - 4$
c) $-(3x - 1) = x + 8$
d) $4x - 8 = 4 - 2x$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość lewej i prawej strony równania dla $x = 2$.

a) $L = 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 4 \cdot 1 = 4$
$P = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$
$L \neq P$

Liczba 2 nie jest rozwiązaniem równania.

Pamiętajmy o kolejności działań.

b) $L = 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot (4 + 1) = 2 \cdot 5 = 10$
$P = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

dla $x = 2$
$L = x^3 - 4x = 2^3 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0$
$P = 4x^2 - 16 = 4 \cdot 2^2 - 16 = 4 \cdot 4 - 16 = 16 - 16 = 0$
$L = P$

dla $x = 4$
$L = x^3 - 4x = 4^3 - 4 \cdot 4 = 64 - 16 = 48$
$P = 4x^2 - 16 = 4 \cdot 4^2 - 16 = 4 \cdot 16 - 16 = 64 - 16 = 48$
$L = P$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć wszystkie jego pierwiastki (liczby, które je spełniają) lub uzasadnić, że ich nie ma.

Reguły postępowania przy rozwiązywaniu równań:

1) **Do obu stron równania można dodać takie samo wyrażenie.**
2) **Od obu stron równania można odjąć takie samo wyrażenie.**
3) **Obie strony równania można pomnożyć przez taką samą liczbę różną od zera.**
4) **Obie strony równania można podzielić przez taką samą liczbę różną od zera.**

Rozwiązując równanie, dążymy do tego, aby po jednej stronie równania znalazły się tylko niewiadome, a po drugiej tylko liczby.

ZADANIE 1

Rozwiąż równanie:

$2x - 10 = 12$

Staramy się otrzymać równanie, w którym po jednej stronie są niewiadome, a po drugiej stronie liczby.

$2x - 10 = 12 \quad / + 10$

W tym celu do obu stron równania dodajemy 10.

$2x - 10 + \mathbf{10} = 12 + \mathbf{10}$

Redukujemy wyrazy podobne.

$2x = 22 \quad / : 2$

Obie strony równania dzielimy przez 2.

$2x : 2 = 22 : 2$

$x = 11$

Rozwiązaniem równania jest liczba 11.

Sprawdzamy, czy liczba 11 spełnia równanie:

$L = 2x - 10 = 2 \cdot 11 - 10 = 22 - 10 = 12$

$P = 12$

$L = P$

Odp.: Rozwiązaniem równania jest liczba 11.

ZADANIE 2

Rozwiąż równanie:

$12x + 7 = 9x + 10 \qquad / - 9x$

Od obu stron równania odejmujemy $9x$.

$12x + 7 \mathbf{- 9x} = 9x + 10 \mathbf{- 9x}$

Redukujemy wyrazy podobne.

$3x + 7 = 10 \qquad / - 7$

Od obu stron równania odejmujemy 7.

$3x + 7 \mathbf{- 7} = 10 \mathbf{- 7}$

$3x = 3 \qquad / : 3$

Obie strony równania dzielimy przez 3.

$3x : 3 = 3 : 3$

$x = 1$

Sprawdzenie:

$L = 12x + 7 = 12 \cdot 1 + 7 = 12 + 7 = 19$

$P = 9x + 10 = 9 \cdot 1 + 10 = 9 + 10 = 19$

$L = P$

Odp.: Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Uwaga.
Nie zawsze dokonujemy sprawdzenia równania, czasem jest to bardziej pracochłonne niż samo rozwiązanie równania.

Zwróć uwagę, że jeśli w równaniu

$12x + 7 = 9x + 10$

przeniesiemy (zmieniając znak na przeciwny) wyrażenie $9x$ na lewą stronę, a liczbę 7 na prawą stronę, to otrzymamy równanie:

$12x - 9x = 10 - 7$

więc

$3x = 3$

Takie samo równanie otrzymaliśmy, odejmując od obu stron równania $9x$ oraz liczbę 7.

Przy rozwiązywaniu równań wygodnie jest przenosić (pamiętając o zmianie znaku na przeciwny) niewiadome na jedną stronę równania, a wiadome na drugą stronę równania.

Pewniak na teście

ZADANIE 3

Niewiadome przenosimy na lewą stronę równania, a liczby na prawą; pamiętamy, **że przenosząc, zmieniamy znak na przeciwny.**

Rozwiąż równanie:

$2x + 12 = 30 - 3x$

ZADANIE 19

Rozwiąż równanie:

$3(x + 3) = 2(x + 4) + x + 1$

$3x + 9 = 2x + 8 + x + 1$

$3x + 9 = 3x + 9$ – tożsamość

Odp.: To równanie spełnia każda liczba rzeczywista, jest to równanie tożsamościowe.

Sprawdzenie:

dla $x = 0$

$L = 3(\mathbf{0} + 3) = 3 \cdot 3 = 9$

$P = 2(\mathbf{0} + 4) + \mathbf{0} + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

$L = P$

dla $x = 1$

$L = 3(\mathbf{1} + 3) = 3 \cdot 4 = 12$

$P = 2(\mathbf{1} + 4) + \mathbf{1} + 1 = 2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12$

$L = P$

ZADANIA TEKSTOWE

Zadania tekstowe większości uczniów sprawiają duże problemy. **Mam nadzieję, że jednak uda mi się zainteresować cię nimi.**

W tym rozdziale znajdziesz **27** bardzo dokładnie wyjaśnionych i rozwiązanych zadań o różnym stopniu trudności.

Rozwiązując zadania tekstowe, **treść zadania przeczytaj bardzo uważnie, najlepiej kilka razy.**

Zadania staraj się rozwiązywać według następującego schematu:

1. **Analiza zadania:** małą literą alfabetu ustalamy niewiadomą oraz układamy wyrażenia zgodnie z treścią zadania.
2. **Ułożenie równania:** wybieramy (z analizy zadania) takie dwa wyrażenia, które przedstawiają tę samą wielkość, i łączymy je znakiem równości.
3. **Rozwiązanie równania.**
4. **Sprawdzenie wyniku z treścią (z warunkami) zadania.**

Uwaga! Ważne!

Sprawdzamy (czytając treść zadania ponownie), **czy wynik spełnia warunki zadania. To nie to samo, co sprawdzenie równania,** bo załóżmy, że równanie rozwiązaliśmy dobrze, ale mogliśmy popełnić błąd przy jego układaniu.

5. **Podanie odpowiedzi.**

Po rozwiązaniu zadania tekstowego jeszcze raz przeczytaj jego treść. Upewnij się, czy na pewno odpowiedziałeś na pytanie.

ROZDZIAŁ V
OBLICZENIA PROCENTOWE

WIADOMOŚCI O PROCENTACH

Jeden procent (1%) to jedna setna część danej wielkości. Przy założeniu, że tę wielkość oznaczamy liczbą 1, procenty można zapisywać jako ułamki o mianowniku 100.

Np.

$$1\% = \frac{1}{100} \qquad 200\% = \frac{200}{100} = 2$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25 \qquad 0,2\% = \frac{0,2}{100} = 0,002$$

Aby liczbę zamienić na procent, należy tę liczbę pomnożyć przez 100 i dopisać znak %.

Np.

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 100\% = \frac{200}{5}\% = 40\%$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7}{\cancel{10}_1} \cdot \cancel{100}^{10}\% = 70\%$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 100\% = \frac{200}{3}\% = 66\frac{2}{3}\%$$

$$2,6 = 2,6 \cdot 100\% = 260\%$$

Aby procent zapisać w postaci ułamka, należy liczbę procentów podzielić przez 100.

Np.

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$170\% = \frac{17\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 1,7$$

$$33\frac{1}{3}\% = 33\frac{1}{3} : 100 = \frac{\cancel{100}^1}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{100}_1} = \frac{1}{3}$$

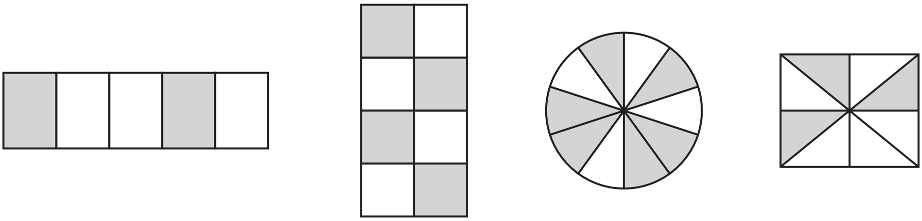
$$3,2\% = 3,2 : 100 = 0,032$$

ZADANIE 1

Pewniak na teście

Wskaż rysunek, na którym zacieniono 60% figury.

a) b) c) d)



Rozwiązanie:

$$60\% \text{ to } \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{3}{5}$$

Zamieniamy procent na ułamek.

Figura a) $\frac{2}{5}$ zacieniono

Figura b) $\frac{4}{8}$ czyli $\frac{1}{2}$ zacieniono

Figura c) $\frac{6}{10}$ czyli $\frac{3}{5}$ zacieniono

Figura d) $\frac{3}{8}$ zacieniono

Odp.: c

ZADANIE 2

Zamień ułamki na procenty:

a) 0,28 b) 4,209 c) 2,4 d) $\frac{17}{20}$ e) $4\frac{3}{5}$

Rozwiązanie:

Podane liczby wystarczy **pomnożyć przez 100** i dopisać symbol %.

Mnożąc przez 100, przesuwamy przecinek w prawo o 2 miejsca.

a) $0{,}28 = 0{,}28 \cdot 100\% = 28\%$

b) $4{,}209 = 4{,}209 \cdot 100\% = 420{,}9\%$

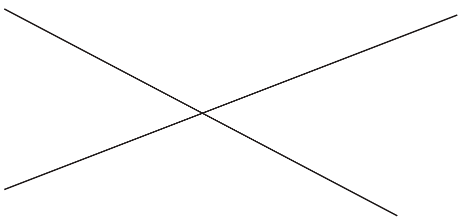
c) $2{,}4 = 2{,}4 \cdot 100\% = 240\%$

d) $\frac{17}{20} = \frac{17}{\cancel{20}_1} \cdot \cancel{100}^5\,\% = 85\%$

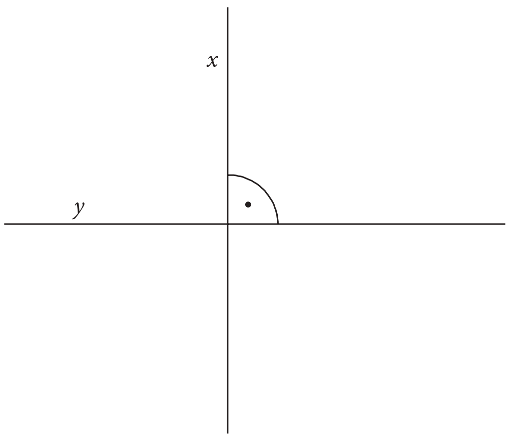
e) $4\frac{3}{5} = \frac{23}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{100}^{20}\,\% = 460\%$

ROZDZIAŁ VI
FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE

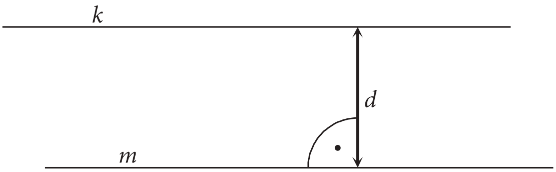
WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH NA PŁASZCZYŹNIE



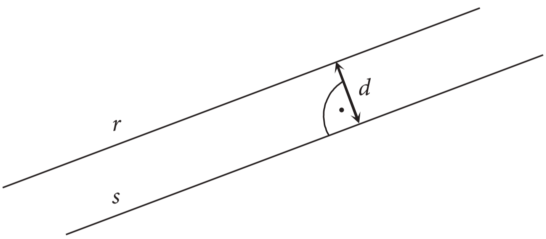
Proste przecinające się.
Proste przecinają się w jednym punkcie.



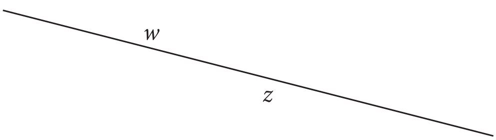
Szczególnym przypadkiem położenia prostych względem siebie są proste przecinające się pod kątem prostym. Nazywają się **prostymi prostopadłymi.**
$y \perp x$



Innym przykładem położenia prostych są **proste równoległe.** Nigdy się nie przecinają, a odległość między nimi jest stała.
Odległość między prostymi równoległymi to długość odcinka prostopadłego do tych prostych o końcach leżących na tych prostych.
$k \parallel m \qquad d \perp k \qquad d \perp m$



$r \parallel s$
Zmniejszanie odległości między prostymi równoległymi prowadzi do uzyskania szczególnego przypadku wzajemnego położenia prostych równoległych:



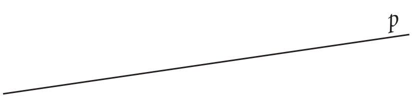
$w \parallel z \qquad d = 0$
to **proste równoległe pokrywające się.**

Wszystkie punkty jednej prostej należą też do drugiej prostej.

PROSTE I ODCINKI

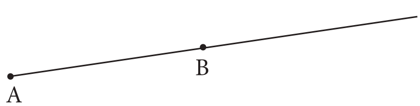
punkt A

Punkty oznaczamy dużymi literami alfabetu.

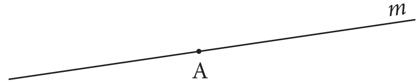


prosta *p*

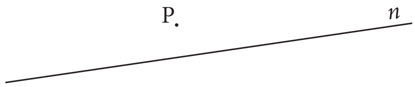
Proste oznaczamy małymi literami alfabetu.



$\overrightarrow{AB}$ – czytamy: półprosta AB (półprosta o początku w punkcie A)

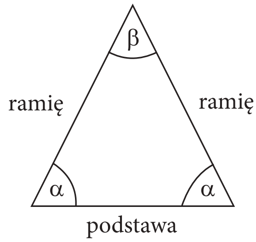


$A \in m$ – czytamy: punkt A należy do prostej *m* ($\in$ – czytamy: należy)



$P \notin n$ – czytamy: punkt P nie należy do prostej *n* ($\notin$ – czytamy: nie należy)

W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.



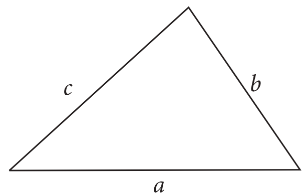
α – kąty przy podstawie
β – kąt między ramionami

W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$a + b > c$

$b + c > a$

$a + c > b$



Suma długości boków trójkąta to jego obwód.

Obw. = $a + b + c$

Pewniak na teście

ZADANIE 1

Odcinek długości 8 cm został podzielony na trzy części. Długość każdej z nich można wyrazić liczbą całkowitą. Z otrzymanych odcinków skonstruowano trójkąt. Podaj wymiary tego trójkąta. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Rozwiązanie:

Wypisujemy wszystkie możliwości podziału odcinka o długości 8 cm na 3 części wyrażone liczbami całkowitymi:

1, 1, 6
2, 2, 4
3, 3, 2
1, 2, 5
1, 3, 4

Sprawdzamy, z których trójek można zbudować trójkąt:

Wiemy, że w trójkącie suma dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

1, 1, 6 $1 + 1 = 2$ $2 < 6$

Nie można zbudować trójkąta.

2, 2, 4 $2 + 2 = 4$ $4 = 4$

Nie można zbudować trójkąta.

3, 3, 2 $3 + 3 = 6$ $6 > 2$
$3 + 2 = 5$ $5 > 3$

Można zbudować taki trójkąt.

ROZDZIAŁ VII
OŚ LICZBOWA. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE

ZBIORY LICZB NA OSI LICZBOWEJ

Zbiory liczb zawierają liczby, które spełniają określony warunek. Przykłady:

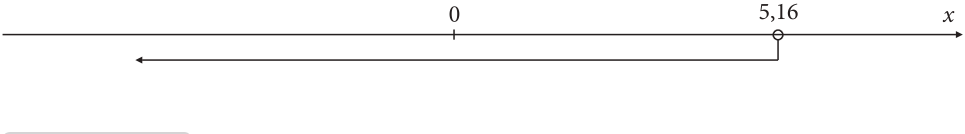
$x > 3{,}2$ Zbiór liczb spełniających ten warunek stanowią wszystkie liczby większe od liczby 3,2.

$x \le 7\frac{2}{3}$ Zbiór liczb spełniających ten warunek stanowią wszystkie liczby mniejsze lub równe liczbie $7\frac{2}{3}$.

Uwaga na spójnik „lub". Oznacza on spełnienie jednego z dwóch postawionych warunków. Błędem byłoby użycie w tym przypadku spójnika „i" gdyż nie jest możliwe równoczesne spełnienie obu warunków. Nie istnieje liczba, która jest równocześnie mniejsza i równa jakiejkolwiek wartości!
Na osi liczbowej zbiory liczbowe przedstawiamy w następujący sposób:

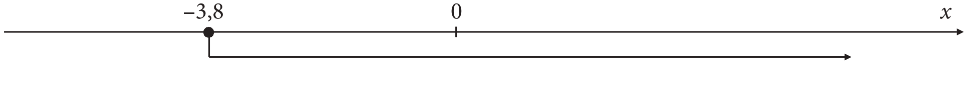
PRZYKŁAD 1

$x < 5{,}16$



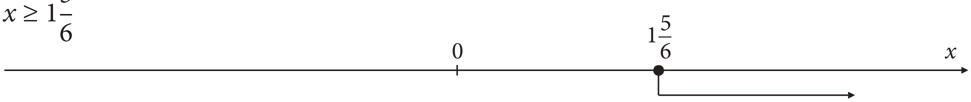
PRZYKŁAD 2

$x \ge -3{,}8$



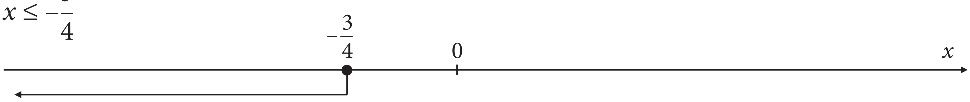
PRZYKŁAD 3

$x \geq 1\frac{5}{6}$



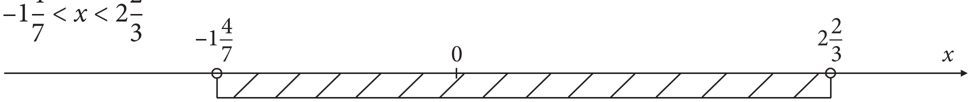
PRZYKŁAD 4

$x \leq -\frac{3}{4}$



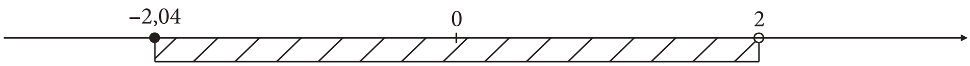
PRZYKŁAD 5

$-1\frac{4}{7} < x < 2\frac{2}{3}$

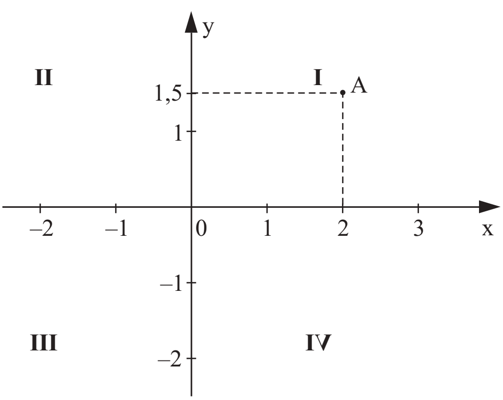


PRZYKŁAD 6

$-2{,}04 \leq x < 2$



UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE



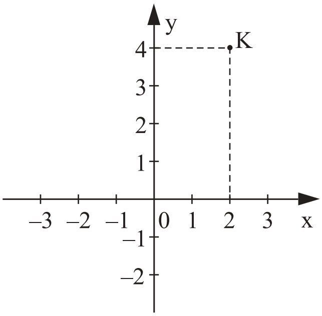
A (*x*; *y*)
↕ ↕
A (2; 1,5)

Osie układu współrzędnych są prostopadłe. Punkt ich przecięcia nazywamy **początkiem układu współrzędnych**.
Położenie każdego punktu w układzie współrzędnych określają dwie liczby.
Pierwszą jest współrzędna *x*, odczytujemy ją na osi poziomej. **Drugą** liczbą jest współrzędna *y*, odczytujemy ją na osi pionowej.

ZAZNACZANIE PUNKTÓW W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

ZADANIE 1

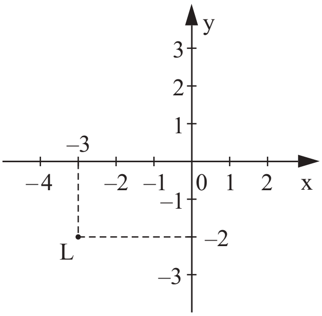
Zaznacz punkt K (2, 4).



Na osi *x* znajdujemy 2, a na osi *y* szukamy 4.

ZADANIE 2

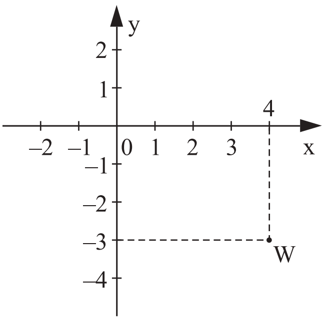
Zaznacz punkt L (–3, –2).



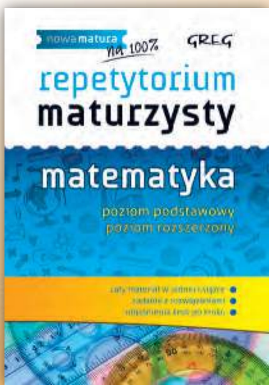
Na osi *x* znajdujemy –3, a na osi *y* szukamy –2.

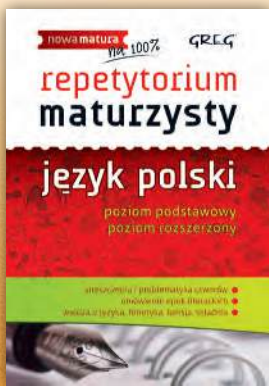
ZADANIE 3

Zaznacz punkt W (4, –3).



Na osi *x* znajdujemy 4, a na osi *y* szukamy –3.

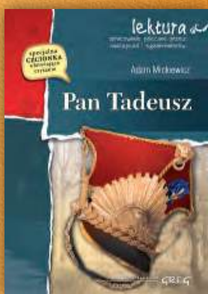


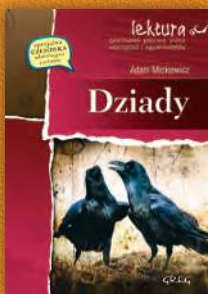


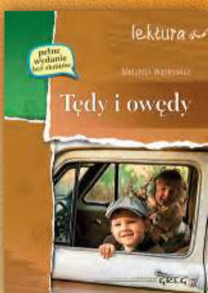
„Repetytorium maturzysty”

wszystkie wymagane wiadomości w jednej książce. Gwarancja sukcesu na maturze!
Zgodne z podstawą programową!

Polecamy lektury z opracowaniem!







I inne tytuły.

ISBN 978-83-7517-886-9

9 788375 178869 >

wydawnictwo edukacyjne GREG

Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B • 31-979 Kraków
www.greg.pl