polecana
przez najlepszych
nauczycieli

liceum
technikum

nowa szkoła średnia

MATEMATYKA
korepetycje

4

- funkcje kwadratowe, wymierne, wielomianowe, trygonometryczne
- planimetria i trygonometria
- twierdzenie sinusów i cosinusów
- wszystkie zadania z rozwiązaniami
- objaśnienia krok po kroku
- przydatne wzory i definicje

GREG
WYDAWNICTWO EDUKACYJNE

liceum
technikum

MATEMATYKA
korepetycje

4

LICEUM – część 4

Autorka:
Grażyna Kiełczykowska

Wykorzystano materiały autorstwa:
Roberta Całki, Joanny Firlit, Katarzyny Korpak, Urszuli Zięby

Redaktor prowadzący serii:
Agnieszka Antosiewicz

Redakcja i korekta:
Karolina Rymut, Joanna Tomasik, Weronika Widzińska, Maria Zagnińska

ISBN: 978-83-7517-957-6

Wydawnictwo GREG®
31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B
tel. 12 680 15 50
www.greg.pl

Księgarnia internetowa: www.greg.pl

Okładka:
Aleksandra Zimoch

Wykorzystano zdjęcie: Monkey Business Images/Shutterstock.com

Skład:
Pracownia Słowa

Spis treści

Wstęp

Drogi Uczniu!

Trzymasz w rękach czwartą część serii *Korepetycje matematyka – liceum*, przeznaczoną dla uczniów klasy czwartej. Zapewne w trzech poprzednich latach nauki korzystałeś z wcześniejszych części serii, więc wiesz już, że te książki naprawdę ułatwiają zrozumienie matematyki. Jednak jeżeli pierwszy raz spotykasz się z naszą serią, to gorąco Ci ją polecamy. **Ta książka w pełni zastąpi kosztowne korepetycje i przygotuje Cię do matury!**

W książce znajdziesz pięć działów: ***Rachunek prawdopodobieństwa*; *Proste i płaszczyzny w przestrzeni*; *Graniastosłupy i ostrosłupy*; *Bryły obrotowe*; *Dowody twierdzeń***. Każdy z nich zawiera dokładnie wyjaśnione zagadnienia teoretyczne z przykładami, dzięki którym każde zagadnienie staje się zrozumiałe. Wszystkie zadania w książce są **rozwiązane krok po kroku, a rozwiązania opatrzono komentarzami**, które umożliwiają prześledzenie toku postępowania i zrozumienie, jak należy rozwiązywać takie zadania.

Dodatkowo publikacja jest przemyślana graficznie, czytelna i przejrzysta, dzięki czemu pracuje się z nią szybko i przyjemnie.

Czwarta część zupełnie nowej odsłony serii *Korepetycje matematyka – liceum* to publikacja **zgodna z aktualną podstawą programową** i zawierająca cały wymagany materiał.

Życzymy Ci więc samych sukcesów na lekcjach matematyki i na egzaminie maturalnym – i nie mamy wątpliwości, że korzystając z naszych *Korepetycji*, z łatwością je osiągniesz!

Autorka
i Wydawnictwo GREG

Rozdział I
Rachunek prawdopodobieństwa

KOMBINATORYKA

Kombinatoryka to sztuka liczenia. Polem jej zainteresowań jest wyznaczanie liczby elementów zbiorów skończonych, utworzonych zgodnie z określonymi zasadami. Narodziła się dzięki grom hazardowym, a rozwój zawdzięcza głównie rachunkowi prawdopodobieństwa, gdzie znajduje szerokie zastosowanie przy wyznaczaniu ilości zdarzeń elementarnych.

Symbolem *n*! (czytaj: *n* silnia) oznaczamy iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n* włącznie.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

inaczej:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

n – 1 to liczba naturalna poprzedzająca liczbę *n*, a liczba *n* – 2 to liczba poprzedzająca liczbę *n* – 1.

Ponadto przyjmuje się, że **0! = 1**.

Zatem:

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ dla } n \in \mathrm{N}_+ \end{cases}$$

N_+ – w ten sposób oznaczamy zbiór liczb naturalnych dodatnich, tzn.: $\mathrm{N}_+ = \mathrm{N} \setminus \{0\}$.

PRZYKŁAD 1

$1! = 1$
$2! = 2 \cdot 1 = 2$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$
$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$
$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

REGUŁA MNOŻENIA

Jeżeli doświadczenie możemy podzielić na dwa etapy, pierwszy z nich wykonamy na n_1 sposobów, a drugi na n_2 sposobów, to całe doświadczenie możemy wykonać na $n_1 \cdot n_2$ sposobów.
Bardziej ogólnie:
jeżeli doświadczenie możemy podzielić na m kolejnych etapów, takich, że w pierwszym etapie jest n_1 sposobów, w drugim – n_2 sposobów, ..., w m-tym – n_m sposobów, to moc zbioru wyników doświadczenia jest równa iloczynowi:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$$

REGUŁA DODAWANIA

Jeżeli mamy wybrać pewien element z dwóch zbiorów A i B, przy czym zbiór A ma n_1 elementów, a zbiór B ma n_2 elementów i zbiory te nie mają wspólnych elementów, to wyboru tego możemy dokonać na dokładnie $n_1 + n_2$ sposobów.
Bardziej ogólnie:
jeżeli zbiór wszystkich wyników możemy podzielić na m podzbiorów takich, że w pierwszym podzbiorze jest n_1 wyników, w drugim – n_2 wyników, ..., w m-tym – n_m wyników i wyniki te są różne, to wszystkich wyników jest:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

ZADANIE 1

Oblicz:

a) $\frac{8!}{6!}$ b) $\frac{6! \cdot 5!}{5! \cdot 4!}$ c) $\frac{9! - 7!}{7! \cdot 3!}$ d) $\frac{25! + 26!}{26! - 25!}$

Rozwiązanie:

Ad a)

$$\frac{8!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = \frac{56}{1} = 56$$

$8! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}_{6!} \cdot 7 \cdot 8 = 6! \cdot 7 \cdot 8$

Skracamy licznik i mianownik przez 6!.

Ad b)

$$\frac{6!\cdot 5!}{5!\cdot 4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!}=5\cdot 6=30$$

Skracamy licznik i mianownik przez 5!. Ponadto $6! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}_{4!}\cdot 5\cdot 6$, więc licznik i mianownik skracamy przez 4!.

Ad c)

$$\frac{9!-7!}{7!\cdot 3!}=\frac{7!\cdot(8\cdot 9-1)}{7!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 9-1}{3!}=$$
$$=\frac{72-1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{71}{6}=11\frac{5}{6}$$

$9!=7!\cdot 8\cdot 9$
W liczniku wyłączamy 7! przed nawias, a następnie skracamy licznik i mianownik przez 7!.

Ad d)

$$\frac{25!+26!}{26!-25!}=\frac{25!+25!\cdot 26}{25!\cdot 26-25!}=$$
$$=\frac{25!\cdot(1+26)}{25!\cdot(26-1)}=\frac{1+26}{26-1}=\frac{27}{25}=1\frac{2}{25}$$

$26! = \underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 25}_{25!}\cdot 26$
Wyłączamy 25! przed nawias w liczniku i mianowniku, następnie skracamy licznik i mianownik przez 25!.

Odp.: a) 56; b) 30; c) $11\frac{5}{6}$; d) $1\frac{2}{25}$.

ZADANIE 2

Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{n!}$

Rozwiązanie:

Ad a)

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{(n-2)!}=$$
$$=\frac{(n-1)\cdot n}{1}=n^2-n$$

$n! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)}_{(n-2)!}\cdot(n-1)\cdot n$
Skracamy licznik i mianownik przez $(n-2)!$.

Ad b)

$$\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=n+1$$

$(n+1)! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}_{n!}\cdot(n+1)$
Skracamy licznik i mianownik przez $n!$.

Odp.: a) n^2-n; b) $n+1$.

ZADANIE 3

Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\frac{[(n+1)!]^2}{n!\cdot(n-1)!}=n\,(n+1)^2$.

Rozwiązanie:

Zajmiemy się przekształceniem lewej strony równości:

$$L=\frac{(n+1)!\cdot(n+1)!}{n!\cdot(n-1)!}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=$$

$[(n+1)!]^2=(n+1)!\cdot(n+1)!$

$$=\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}\cdot\frac{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}{(n-1)!}=$$

$(n+1)!=n!\cdot(n+1)$

$$=(n+1)\cdot n\cdot(n+1)=n(n+1)^2=P$$

$(n+1)!=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)$

Zatem L = P.

Odp.: Dana równość jest prawdziwa.

PERMUTACJE

Permutacją zbioru n-elementowego ($n\in N_+$) nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów danego zbioru n-elementowego.

Z **permutacjami** danego zbioru mamy do czynienia wtedy, gdy **porządkujemy elementy** danego zbioru (kolejność elementów jest tutaj istotna).

ZADANIE 4

Ankieta ma być złożona z trzech pytań: A, B i C. Na ile sposobów można ją ułożyć, zmieniając tylko kolejność pytań?

Rozwiązanie:

Wypiszmy wszystkie możliwe ustawienia:
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Kolejność ustawienia elementów jest istotna. Każde z tych sześciu ustawień jest ciągiem 3-wyrazowym, czyli permutacją zbioru {A, B, C}.

Odp.: Jest 6 możliwych sposobów ułożenia kolejności pytań w ankiecie.

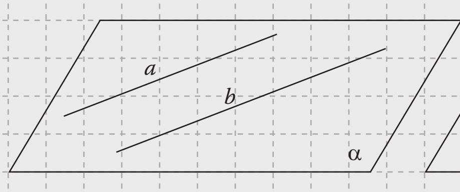
Rozdział II
Proste i płaszczyzny w przestrzeni

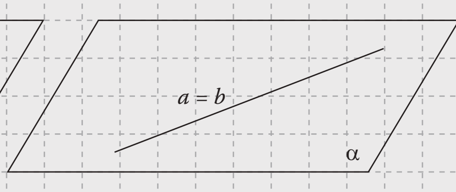
WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PROSTYCH W PRZESTRZENI

Płaszczyzna to pojęcie pierwotne, czyli pojęcie elementarne, które wprowadzamy bez definiowania.
Płaszczyznę w sposób jednoznaczny określają np.:
- trzy niewspółliniowe punkty (punkty nieleżące na jednej prostej),
- prosta i punkt nienależący do tej prostej,
- dwie różne proste równoległe,
- dwie proste przecinające się.

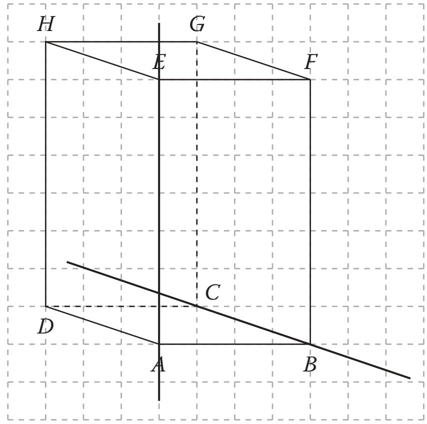
Płaszczyzny oznaczamy literami greckiego alfabetu α, β, ϕ, podobnie jak kąty.

Proste równoległe: proste niemające punktów wspólnych i leżące na jednej płaszczyźnie lub proste pokrywające się.



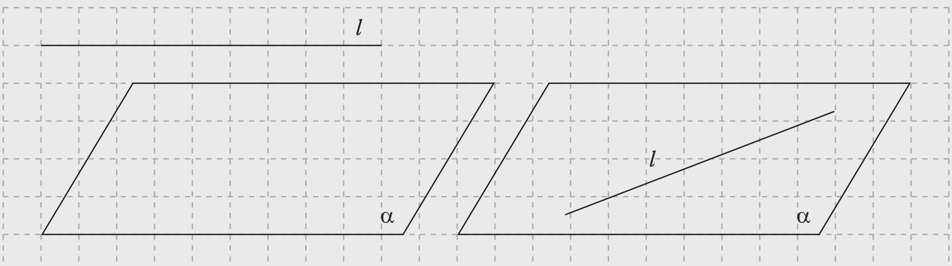


Ad c) Przykładem prostych prostopadłych nieprzecinających się (czyli przykładem prostych skośnych, dla których istnieje prosta równoległa do jednej z tych prostych prostopadła do drugiej) jest np. *AE* i *CB*.

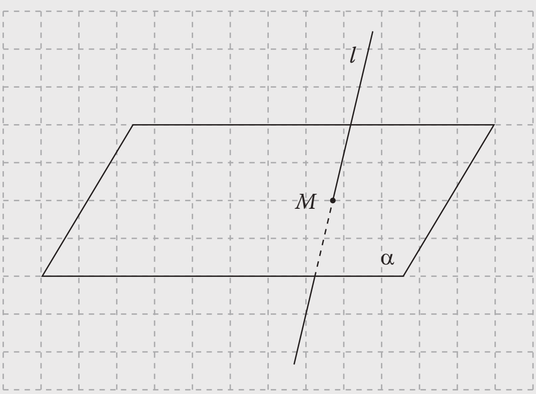


WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I PŁASZCZYZNY

Prosta równoległa do płaszczyzny: prosta jest równoległa do płaszczyzny, gdy nie ma ona żadnych punktów wspólnych z płaszczyzną lub zawiera się w tej płaszczyźnie.



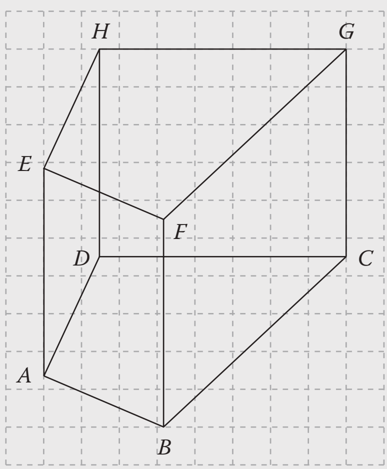
Prosta przecinająca (przebijająca) płaszczyznę: prosta mająca dokładnie jeden punkt wspólny z daną płaszczyzną.



Rozdział III
Graniastosłupy i ostrosłupy

OBJĘTOŚĆ I POLE POWIERZCHNI GRANIASTOSŁUPA

Graniastosłup jest to wielościan posiadający podstawy w_1, w_2 będące przystającymi wielokątami zawartymi w różnych płaszczyznach równoległych, którego ściany boczne są równoległobokami.



A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* – wierzchołki graniastosłupa,
czworokąty *ABCD*; *EFGH* – podstawy graniastosłupa,
odcinki *AE*, *BF*, *CG*, *DH* – krawędzie boczne graniastosłupa,
odcinki *AB*, *DC*, *AD*, *BC*, *EF*, *HG*, *EH*, *FG* – krawędzie podstawy graniastosłupa,
wielokąty *ABFE*, *DCGH*, *BCGF*, *ADHE* – ściany boczne graniastosłupa.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje graniastosłupów:
- graniastosłup pochyły,
- graniastosłup prosty.

Możemy więc policzyć pole tego trójkąta:

$$P_p = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3} \ \text{cm}^2$$

Zajmijmy się teraz polem powierzchni bocznej.
Składa się ona z trzech prostokątów o wymiarach: 10 cm × 6 cm, 10 cm × 6 cm, 10 cm × $6\sqrt{3}$ cm.

$$P_b = 10 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 6\sqrt{3}$$

10 cm – wysokość graniastosłupa.

$$P_b = 60 + 60 + 60\sqrt{3} = 120 + 60\sqrt{3} \ \text{cm}^2$$

Zatem pole całkowite wynosi:

$P_c = 2P_p + P_b$

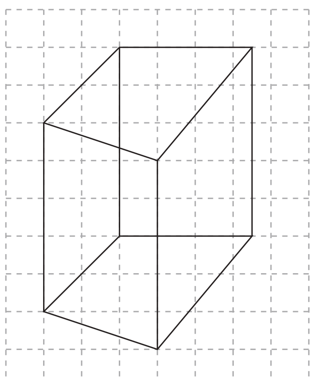
$$P_c = 2 \cdot 9\sqrt{3} + 120 + 60\sqrt{3} = 18\sqrt{3} + 120 + 60\sqrt{3} = 120 + 78\sqrt{3} \ \text{cm}^2$$

Odp.: Pole powierzchni graniastosłupa wynosi $120 + 78\sqrt{3}$ cm^2.

ZADANIE 5

Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 24 cm, 10 cm, 12 cm, 10 cm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeśli jego pole boczne wynosi 1400 cm^2.

Rozwiązanie:



Pole boczne to suma pól wszystkich ścian bocznych. Prostą metodą na obliczenie pola powierzchni bocznej jest pomnożenie obwodu podstawy graniastosłupa przez jego wysokość.
P_b = obwód podstawy · wysokość graniastosłupa

Obliczmy więc obwód podstawy:

Obw = 24 + 12 + 10 + 10 = 56 cm

Tworzymy równanie:

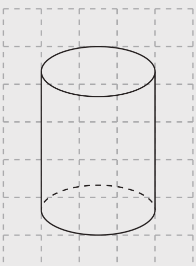
1400 = 56 · H, gdzie H – wysokość graniastosłupa.

H = 25 cm

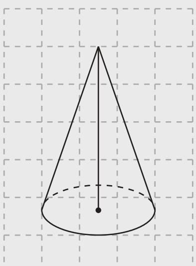
Odp.: Wysokość graniastosłupa wynosi 25 cm.

Rozdział IV
Bryły obrotowe

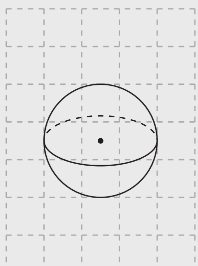
Bryłami obrotowymi nazywamy bryły, które powstają przez obrót figury płaskiej f wokół prostej k, zawartej w płaszczyźnie zawierającej figurę f.
Prosta k nazywa się osią bryły obrotowej i jest jednocześnie jej osią symetrii.
Najbardziej popularne bryły obrotowe to: walec (powstały przez obrót prostokąta), stożek (powstały przez obrót trójkąta prostokątnego) oraz kula (powstała przez obrót półkola).



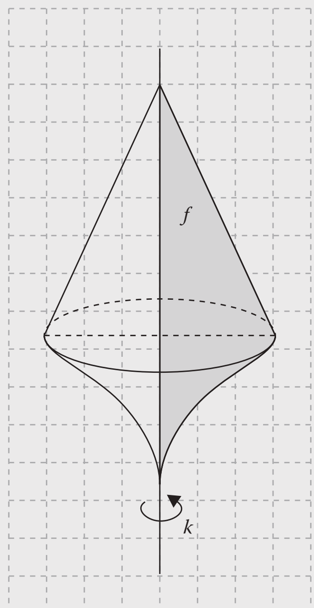
walec



stożek



kula

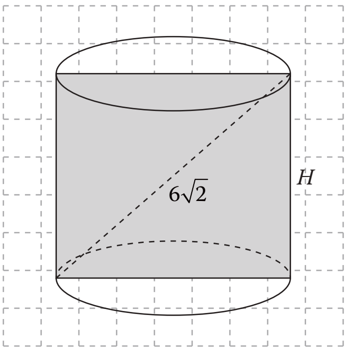


ZADANIE 2

Oblicz objętość walca, którego przekrój to kwadrat o przekątnej mającej długość $6\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Przekątna kwadratu ma długość $6\sqrt{2}$.



Wzór na przekątną kwadratu: $d = a\sqrt{2}$.

Tworzymy równanie:

$a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \quad / : \sqrt{2}$

$a = 6$

Zatem średnica podstawy i wysokość walca mają tę samą długość równą 6.

$H = 6$

$r = 6 : 2 = 3$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$

$V = \pi r^2 \cdot H$

Odp.: Objętość walca jest równa 54π cm^3.

ZADANIE 3

Pole powierzchni całkowitej walca jest cztery razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz promień postawy tego walca, jeśli jego objętość wynosi 72π cm^3.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że $P_c = 4P_b$ oraz, że $V = 72\pi$.
Zatem:

$2\pi r^2 + 2\pi rH = 4 \cdot 2\pi rH$

$P_b = 2\pi rH$
$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rH$

$2\pi r^2 + 2\pi rH = 8\pi rH \quad / - 2\pi rH$

Wyznaczamy z tego równania długość promienia.

$2\pi r^2 = 6\pi rH \quad / : 2\pi r,\ r > 0$

$r = 3H$

Rozdział V
Dowody twierdzeń

Każde twierdzenie w matematyce ma swój dowód, czyli ścisłe, przebiegające zgodnie z ustalonymi regułami uzasadnienie danego stwierdzenia.
Dzięki zrozumieniu dowodów matematycznych można w łatwy sposób uogólniać zależności. Przeprowadzanie dowodów matematycznych uczy więc logicznego myślenia.
Istnieje wiele metod dowodzenia. Poniżej znajduje się kilka zadań dotyczących dowodów, które zawarte są w podstawie programowej. Najczęściej udowadniamy je metodą „wprost", ale są też dowody „nie wprost", które są szczegółowo wyjaśnione.

ZADANIE 1

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że istnieje skończona liczba liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

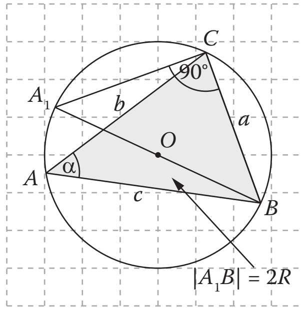
Zdefiniujmy liczbę:
$k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ i rozważmy $k + 1$.

Częstą metodą dowodzenia twierdzeń matematycznych jest dowodzenie nie wprost. Dowód nie wprost polega na założeniu zaprzeczenia twierdzenia, które chcemy udowodnić, i doprowadzeniu do sprzeczności. Wykazujemy, że jeśli nasze twierdzenie jest nieprawdziwe, jesteśmy w stanie udowodnić jakąś tezę, która jest w sposób oczywisty fałszywa.

$k + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

Zauważmy, że liczba $k + 1$ nie dzieli się przez żadną z liczb $p_1, \ldots, p_n$ (bo przy dzieleniu przez każdą z nich daje resztę 1), więc musi to być liczba pierwsza (bo nie ma

Korzystając więc z definicji funkcji sinus dla trójkąta prostokątnego A_1BC, otrzymujemy:



$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|A_1B|} = \frac{a}{2R}$$

Przekształćmy powyższe równanie:

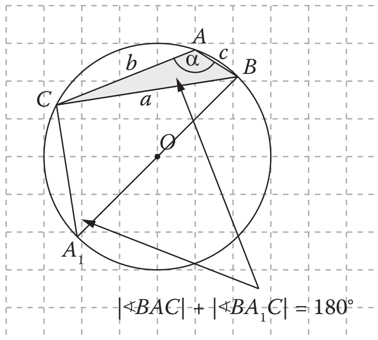
$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \quad / \cdot 2R$$

R – promień okręgu opisanego na trójkącie.

$$\sin\alpha \cdot 2R = a \quad / : \sin\alpha$$

$2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, co należało udowodnić.

Ad. 3. Gdy α jest kątem rozwartym.
Na rysunku obok poprowadziliśmy średnicę A_1B.
Trójkąt A_1CB jest prostokątny.
Kąty BAC i BA_1C są oparte na łukach, które w sumie dają cały okrąg (ich suma miar musi więc dać połowę miary kąta pełnego).



Zatem ich miary możemy zapisać następująco:

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i $|\sphericalangle BA_1C| = 180° - \alpha$

Korzystając więc z definicji funkcji sinus dla trójkąta prostokątnego A_1CB, otrzymujemy:

$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{|BC|}{|A_1B|} = \frac{a}{2R}$$

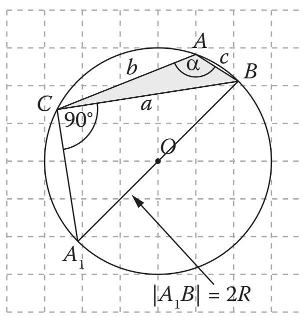
Przekształćmy powyższe równanie:

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \quad / \cdot 2R$$

$$\sin\alpha \cdot 2R = a \quad / : \sin\alpha$$

R – promień okręgu opisanego na trójkącie.

$2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, co należało udowodnić.



Z powyższych rozważań wynika, że niezależnie, czy kąt α jest prosty, ostry, czy rozwarty, równość $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ jest prawdziwa. Pozostałych równości dowodzi się analogicznie.

ZADANIE 12

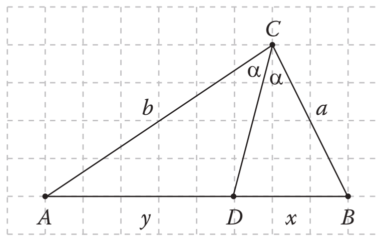
Udowodnij twierdzenie o dwusiecznej kąta. Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$.

Rozwiązanie:

Niech $|AD| = y$, $|DB| = x$

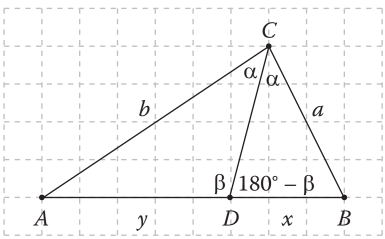
$|AC| = b$, $|BC| = a$

Rysunek obok obrazuje sytuację opisaną w twierdzeniu, które mamy udowodnić.



Naszym zadaniem jest więc udowodnić, że zachodzi równość $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$.

Przyjmijmy, że $|\sphericalangle ADC| = \beta$. Wtedy $|\sphericalangle BDC| = 180° - \beta$, gdyż są to kąty przyległe.



Suma kątów przyległych wynosi 180°.

Skorzystajmy z twierdzenia sinusów dla trójkątów *ADC* i *BDC*:

Twierdzenie sinusów: w dowolnym trójkącie stosunek długości boków do sinusów przeciwległych kątów jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

$$\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

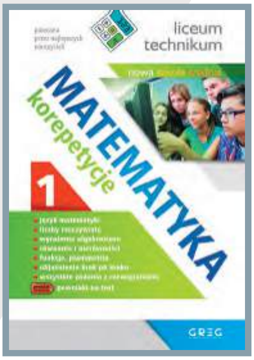
oraz:

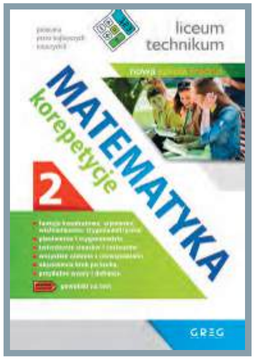
$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(180°-\beta)}$$

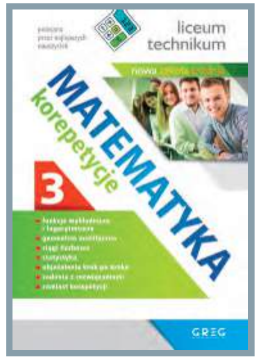
$\sin(180° - \beta) = \sin\beta$

Drugie równanie ma więc postać: $\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\beta}$.

Przekształćmy to równanie: $x\sin\beta = a\sin\alpha$, czyli: $\sin\beta=\frac{a\sin\alpha}{x}$.
Podstawmy tę równość do pierwszego równania.







Nowe KOREPETYCJE MATEMATYKA obejmują **wszystkie zagadnienia z podstawy programowej z zakresu podstawowego**. Każdy dział posiada rozbudowaną część teoretyczną wraz z przykładami, która przystępnie wyjaśnia wszystkie nowe zagadnienia, a także przypomina potrzebne informacje z wcześniejszych lat nauki. Zadania odpowiadają typom zadań, jakie będą pojawiać się na klasówkach i sprawdzianach. **Rozwiązanie każdego zadania zostało omówione** krok po kroku, dzięki czemu można przeanalizować i zrozumieć tok działania. Układ działów w poszczególnych częściach serii odpowiada najpopularniejszym podręcznikom.

ISBN 978-83-7517-957-6
9 788375 179576 >

GREG WYDAWNICTWO
Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B ▪ 31-979 Kraków
www.greg.pl