polecana
przez najlepszych
nauczycieli

liceum
technikum

nowa szkoła średnia

MATEMATYKA

korepetycje

3

- funkcje wykładnicze i logarytmiczne
- geometria analityczna
- ciągi liczbowe
- statystyka
- objaśnienia krok po kroku
- zadania z rozwiązaniami
- zamiast korepetycji

GREG
WYDAWNICTWO EDUKACYJNE

Korepetycje matematyka
LICEUM – część 3

Autorka:
Grażyna Kiełczykowska

Wykorzystano materiały autorstwa:
Roberta Całki, Joanny Firlit, Katarzyny Korpak, Urszuli Zięby

Redaktor prowadzący serii:
Agnieszka Antosiewicz

Redakcja i korekta:
Karolina Rymut, Maria Zagnińska

ISBN: 978-83-7517-949-1

Wydawnictwo GREG®
31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B
tel. 12 680 15 50
www.greg.pl

Księgarnia internetowa: www.greg.pl

Okładka:
Aleksandra Zimoch

Spis treści

Wstęp

Drogi Uczniu!

Masz przed sobą trzecią część serii *Korepetycje matematyka – liceum*, przeznaczoną dla uczniów klasy trzeciej. Zapewne we wcześniejszych klasach wykorzystywałeś do nauki część pierwszą i drugą, więc wiesz już, że dzięki tym książkom naprawdę można zrozumieć matematykę. Jednak jeżeli to Twoje pierwsze zetknięcie z tą serią, to gorąco Ci ją polecamy. **Ta książka w pełni zastąpi kosztowne korepetycje!**

W książce znajdują się cztery działy: ***Funkcja wykładnicza i logarytmiczna***; ***Ciągi***; ***Geometria analityczna***; ***Statystyka***. W każdym z nich znajdziesz **dokładnie wyjaśnione zagadnienia teoretyczne** wraz z przykładami, dzięki którym każde zagadnienie łatwo można zrozumieć. Wszystkie zadania w książce są **rozwiązane krok po kroku, a rozwiązania opatrzono komentarzami**, które umożliwią Ci prześledzenie toku rozumowania i zrozumienie, jak rozwiązuje się takie zadania.

Dodatkowo publikacja jest przemyślana graficznie, czytelna i przejrzysta, dzięki czemu pracuje się z nią szybko i przyjemnie.

Trzecia część zupełnie nowej odsłony serii *Korepetycje matematyka – liceum* to publikacja **zgodna z aktualną podstawą programową** i zawierająca cały wymagany materiał.

Życzymy Ci więc samych sukcesów na lekcjach matematyki – i nie mamy wątpliwości, że korzystając z naszych *Korepetycji*, z łatwością je osiągniesz!

Autorka
i Wydawnictwo GREG

Rozdział I
Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

PRZYPOMNIENIE DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

Przypomnijmy podstawowe wzory dotyczące działań na potęgach:

Jeśli $x, y \in R$ i $a, b \in R_+$, to:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ np.: $2^{-4} \cdot 2^3 = 2^{-4+3} = 2^{-1}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$ $\left(\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\right)$ np.: $3^{-5} : 3^{-2} = 3^{-5-(-2)} = 3^{-5+2} = 3^{-3}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ np.: $\left(7^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 7^{-1}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ np.: $4^2 \cdot 7^2 = (4 \cdot 7)^2 = 28^2$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ np.: $\left(\frac{11}{15}\right)^3 = \frac{11^3}{15^3}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ np.: $7^{-5} = \frac{1}{7^5}$
- $a^0 = 1$
- $0^x = 0$ $(x \in R_+)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ np.: $\sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$, $m, n \in N$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

DEFINICJA I WŁASNOŚCI FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję $f(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathrm{R}$ (zbiór liczb rzeczywistych) i a jest ustaloną liczbą dodatnią.

Np.: $f(x) = 2^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = (0{,}1)^x$

Własności:

– **gdy $a \in (0, 1)$** (lub inaczej $0 < a < 1$), to **funkcja wykładnicza jest malejąca** (tzn. wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji, **czyli** dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2:

$$x_1 < x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^{x_1} > a^{x_2}$$

np.: $2 < 3$ ale $\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ bo $\frac{1}{9} > \frac{1}{27}$

– **gdy $a \in (1, +\infty)$** (lub inaczej $a > 1$), to **funkcja wykładnicza jest rosnąca** (tzn. wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji, **czyli** dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2:

$$x_1 < x_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^{x_1} < a^{x_2}$$

np.: $2 < 3$ i $3^2 < 3^3$ bo $9 < 27$

– **funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie** (tzn. większe od zera).

Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ dla $a \in \mathrm{R}_+ \setminus \{1\}$ jest różnowartościowa, czyli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 zachodzi warunek:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x_1 = x_2$$

Przeanalizujmy poniższe wykresy.

Wykres I, $a \in (1, +\infty)$

a) $f(x) = 2^x \quad a = 2$

Obliczymy przykładowe wartości funkcji f.

$x = -2 \quad f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$x = -1 \quad f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

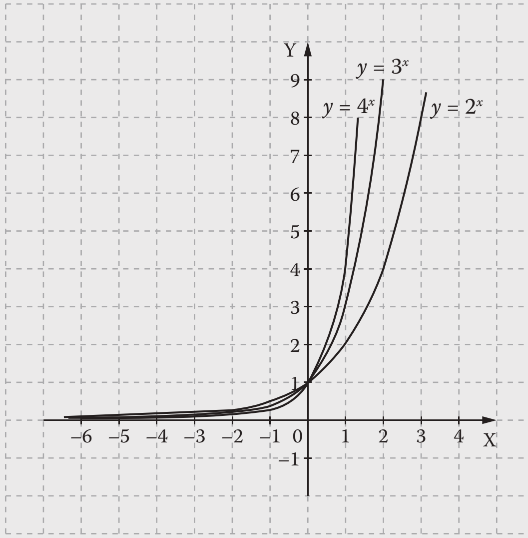
$x = 0 \quad f(0) = 2^0 = 1$

$x = 1 \quad f(1) = 2^1 = 2$

$x = 2 \quad f(2) = 2^2 = 4$

$x = 3 \quad f(3) = 2^3 = 8$

b) $f(x) = 3^x$
c) $f(x) = 4^x$
obliczenia wykonujemy analogicznie



Wykres nie przecina osi OX, funkcja rośnie w całej swojej dziedzinie.

Wykres II, $a \in (0, 1)$

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad a = \frac{1}{2}$

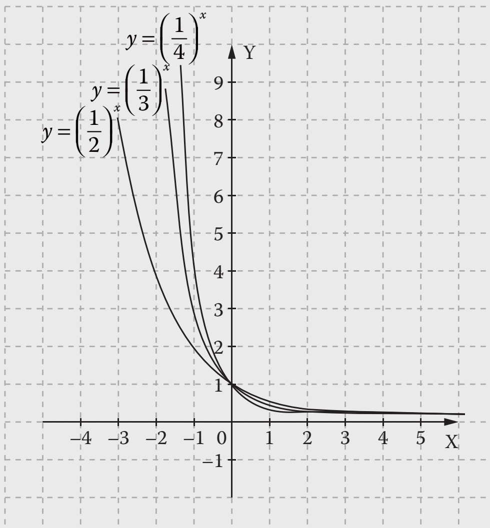
np.: $x = -2 \quad f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

$x = -1 \quad f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

$x = 0 \quad f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$

$x = 1 \quad f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

$x = 2 \quad f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$



b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
obliczenia wykonujemy analogicznie

Wykres nie przecina osi OX, funkcja maleje w całej swojej dziedzinie.

ZADANIE 1

Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$

b) $\log 1000$

c) $\log_{0,25} 16$

d) $\log_2(\log 100)$

e) $\log\sqrt{10}$

f) $\log_{1,5} \frac{9}{4}$

g) $\log_\pi 1$

Rozwiązanie:

Ad a) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3^1 = 3$

Ad b) $\log 1000 = 3$

$10^3 = 1000$
Jeśli nie ma podanej podstawy logarytmu, to logarytm jest dziesiętny:
$\log 1000 = \log_{10} 1000$

Ad c) $\log_{0,25} 16 = -2$

$0,25 = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

Ad d) $\log_2(\log 100) = \log_2 2 = 1$

Najpierw wykonujemy działanie w nawiasie:
$\log 100 = 2$, bo: $10^2 = 100$
$\log_2 2 = 1$, bo $2^1 = 2$

Ad e) $\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

zatem: $\log\sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Ad f) $\log_{1,5} \frac{9}{4} = 2$

$1,5 = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

zatem: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Ad g) $\log_\pi 1 = 0$

$a^0 = 1$, zatem: $\pi^0 = 1$

ZADANIE 2

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby:

a) $3 + \log_3 4$

b) $3\log_2 10 - 2$

c) $4\log_{\frac{1}{2}} 5 - 3$

Rozwiązanie:

Ad a) Aby wyrażenie $3 + \log_3 4$ zapisać w postaci logarytmu, liczbę 3 zamieniamy na logarytm o takiej samej podstawie, jaką ma logarytm w tym wyrażeniu:

$3 = \log_3 27$

$3^3 = 27$

Zatem:

$\log_3 27 + \log_3 4 = \log_3(27 \cdot 4) = \log_3 108$

Korzystamy ze wzoru:
$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$ dla $x, y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Ad b) $3\log_2 10 - 2 = \log_2 10^3 - \log_2 4 =$

$= \log_2 1000 - \log_2 4 = \log_2 \dfrac{1000}{4} = \log_2 250$

Korzystamy ze wzorów:
$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$, $\log_a x^r = r\log_a x$
dla $x, y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

$\log_2 4 = 2$, bo
$2^2 = 4$

Ad c) $4\log_{\frac{1}{2}} 5 - 3 = \log_{\frac{1}{2}} 5^4 - \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8} =$

$= \log_{\frac{1}{2}} 625 - \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8} =$

$= \log_{\frac{1}{2}} \left(625 : \dfrac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 5000$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$, bo
$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ZADANIE 3

Podaj wzór funkcji logarytmicznej, do której należy punkt $A(27, 3)$.

Rozwiązanie:

$f(x) = \log_a x$ dla $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

Podstawiamy nasz punkt do wzoru funkcji: $3 = \log_a 27$.
Powstaje więc równanie:

$a^3 = 27$

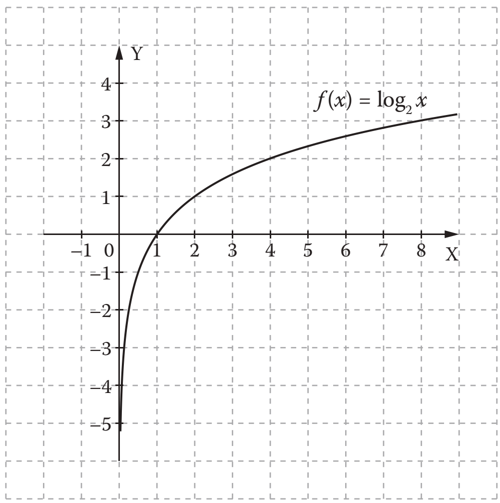
$3^3 = 27$

$a = 3$

Wzór funkcji: $f(x) = \log_3 x$.

ZADANIE 4

Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$, której dziedziną jest przedział $\langle 2, 4\rangle$.



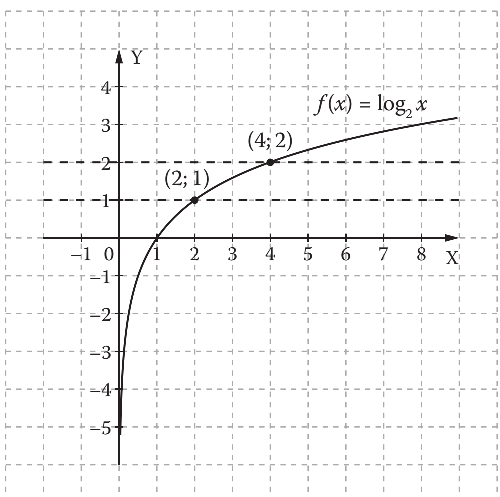
Rozwiązanie:

Aby rozwiązać to zadanie, musimy obliczyć wartość tej funkcji dla krańców przedziału:

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$

$$f(4) = \log_2 4 = 2$$

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$



Odp.: Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$, której dziedziną jest przedział $\langle 2, 4\rangle$, jest przedział $\langle 1, 2\rangle$.

ZADANIE 5

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \log_{2m} x$ jest rosnąca?

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \log_{2m} x$ jest rosnąca, gdy $2m > 1$.
Rozwiązujemy więc nierówność:

Funkcja $f(x) = \log_a x$ dla $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ jest rosnąca dla $a > 1$.

$$2m > 1 \quad / : 2$$

$$m > \frac{1}{2}$$

Odp.: Funkcja $f(x) = \log_{2m} x$ jest rosnąca dla $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

ZASTOSOWANIE FUNKCJI WYKŁADNICZEJ I LOGARYTMICZNEJ

Funkcja wykładnicza przydaje się do opisu wielu zjawisk zachodzących w codziennym życiu. Stosujemy ją **do opisu wielkości, które zmieniają się w stałym tempie**, czyli rosną lub maleją o taki sam procent w takich samych odcinkach czasu. Charakterystyczne dla nich jest to, że od pewnego momentu ich przyrost jest dużo szybszy od wzrostu liniowego. Przeciwna sytuacja dotyczy spadku w tempie wykładniczym – jest on wolniejszy od spadku w tempie liniowym. Przykłady zjawisk związanych ze wzrostem lub spadkiem wykładniczym znajdziesz w naukach społecznych (gospodarce, demografii), chemii, biologii.

PRZYKŁAD 1

Do określenia liczebności osobników danej populacji używamy wzoru:

$$L(t) = L(0) \cdot a^t$$

gdzie:
$L(0)$ – początkowa liczba osobników w populacji
$a > 0$

Obserwujemy kolonię bakterii. Na początku obserwacji naliczyliśmy 800 osobników. Na skutek rozmnażania ich liczba co godzinę wzrasta o 10%. Ile bakterii będzie liczyć kolonia po 3 godzinach, ile będzie ich po 5 godzinach, a ile po 10?

Liczbę osobników obliczymy ze wzoru:

$$L(t) = 800 \cdot 1{,}1^t$$

$a = 1{,}1$ gdyż wzrost liczby bakterii jest o 10%.

ZADANIE 4

Oblicz natężenie wydawanego przez startujący samolot dźwięku, którego poziom natężenia wynosi 110 dB.

Rozwiązanie:

Zgodnie z przykładem 3 poziom natężenia dźwięku określa wzór:

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$L = 110$ dB
$I_0 = 10^{-12}$

gdzie:
L – poziom natężenia dźwięku
I – natężenie dźwięku
I_0 – natężenie dźwięku odniesienia, wynoszące 10^{-12} W/m^2

Podstawiamy do wzoru nasze dane z zadania:

$L = 110$ dB
$I_0 = 10^{-12}$

$$110 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \quad / :10$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$11 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$10^{11} = \frac{I}{10^{-12}} \quad / \cdot 10^{-12}$$

$$10^{-1} = I$$

$$I = \frac{1}{10}$$

Odp.: Natężenie dźwięku wynosi $\frac{1}{10}$ W/m^2.

Rozdział II
Ciągi

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU LICZBOWEGO

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich, a wartości funkcji – wyrazami ciągu i oznaczamy go w następujący sposób: (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Jeśli wartości tej funkcji są liczbami rzeczywistymi, to ciąg nazywamy **ciągiem liczbowym.**

Nieskończonym ciągiem liczbowym jest na przykład ciąg wszystkich liczb naturalnych nieparzystych, ustawionych w kolejności od najmniejszej do największej, tj: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, … lub inny zapis $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$.

Ciągiem skończonym n-elementowym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i oznaczamy: (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Mamy różne sposoby opisywania ciągów. Można go opisać słowami, można zapisać go za pomocą wzoru. W tym przypadku możemy dany ciąg zapisać za pomocą **wzoru ogólnego lub rekurencyjnego**.

Obliczmy kilka pierwszych wyrazów ciągu opisanego za pomocą **wzoru ogólnego**:
$a_n = 1 + 2n$
$n = 1$
$a_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
$n = 2$
$a_2 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
$n = 3$
$a_3 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
itd.

Drugim ważnym sposobem opisywania ciągu jest **wzór rekurencyjny**.
Obliczmy teraz kilka pierwszych wyrazów ciągu opisanego za pomocą tego właśnie typu wzoru:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$a_1 = 1$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{3}{3} = 2$$

itd.
Jak widać, wzór rekurencyjny (indukcyjny) opisuje nam dany ciąg w taki sposób, że najpierw podawany jest wyraz pierwszy lub kilka pierwszych wyrazów danego ciągu, a wzór na n-ty wyraz podajemy w zależności od wyrazów poprzednich.

Ciąg (a_n) nazywamy **rosnącym** wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wyraz ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, czyli zachodzi nierówność:
$a_{n+1} > a_n$ lub inny zapis: $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby $n \geq 1$.
$(a_n) \nearrow$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n większej od 0 zachodzi nierówność:

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

Ciąg (a_n) nazywamy **malejącym** wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wyraz ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli zachodzi nierówność:
$a_{n+1} < a_n$ lub inny zapis: $a_{n+1} - a_n < 0$ dla każdej liczby $n \geq 1$.
$(a_n) \searrow$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n większej od 0 zachodzi nierówność:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

ZADANIE 1

Wykaż, że ciąg $a_n = n$ jest rosnący.

Rozwiązanie:

Najpierw należy utworzyć wyraz następny danego ciągu, tzn. a_{n+1}. Aby ten wyraz uzyskać, trzeba w miejsce n wstawić $n + 1$, czyli:

$a_{n+1} = n + 1$

Teraz korzystamy z definicji ciągu rosnącego. Ciąg jest rosnący, gdy różnica $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdego $n \geq 1$.

$a_{n+1} - a_n = n + 1 - n = 1$, ponieważ $1 > 0$

ciąg $a_n = n$ jest rosnący, tj. $(a_n)\nearrow$.

ZADANIE 2

Wykaż, że ciąg $a_n = n - \frac{1}{2}$ jest rosnący.

Rozwiązanie:

Najpierw tworzymy wyraz następny, tzn. a_{n+1}, wstawiając w miejsce n wyrażenie $n + 1$:

$$a_{n+1} = n + 1 - \frac{1}{2}$$

Teraz korzystamy z definicji ciągu rosnącego. Ciąg jest rosnący, gdy różnica $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdego $n \geq 1$.

$$a_{n+1} - a_n = n + 1 - \frac{1}{2} - \left(n - \frac{1}{2}\right) = \cancel{n} + 1 - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{n} + \cancel{\frac{1}{2}} = 1$$

Ponieważ 1 jest liczbą większą od zera, więc ciąg jest rosnący, tj. $(a_n)\nearrow$.

ZADANIE 3

Wykaż, że ciąg $b_n = n^2$ jest ciągiem rosnącym.

Rozwiązanie:

Najpierw tworzymy wyraz następny jak w poprzednim zadaniu, tzn. b_{n+1}:

$b_{n+1} = (n + 1)^2$

Teraz korzystamy z definicji ciągu rosnącego. Ciąg jest rosnący, gdy różnica $b_{n+1} - b_n > 0$ dla każdego $n \geq 1$.

Podnosimy do kwadratu, korzystając ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$b_{n+1} - b_n = (n + 1)^2 - n^2 =$

$= \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n + 1 > 0$

Zauważamy, że $2n + 1$ jest liczbą zawsze dodatnią, ponieważ $n > 0$ jest liczbą naturalną (większą od zera), zatem ciąg b_n jest rosnący.

ZADANIE 4

Wykaż, że ciąg $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ jest rosnący.

Rozwiązanie:

Najpierw tworzymy wyraz następny, tzn. u_{n+1}, wstawiając w miejsce n wyrażenie $n + 1$.

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{3n+3+1}{n+3} = \frac{3n+4}{n+3}$$

Opuszczamy nawias, redukujemy wyrazy podobne.

Teraz korzystamy z definicji ciągu rosnącego. Ciąg jest rosnący, gdy różnica $u_{n+1} - u_n > 0$ dla każdego $n \geq 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+4}{3+n} - \frac{3n+1}{n+2} =$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika.

$$= \frac{(3n+4)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(3n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{(3n+4)(n+2)-(3n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$$

Wykonujemy wszystkie działania, mnożymy i redukujemy wyrazy podobne.

$$= \frac{3n^2+6n+4n+8-\left(3n^2+9n+n+3\right)}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{3n^2}+6n+4n+8-\cancel{3n^2}-9n-n-3}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{10n}+8-\cancel{10n}-3}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{5}{(n+3)(n+2)} > 0$$

Zauważamy, że otrzymany iloraz jest dodatni, ponieważ 5 jest dodatnie i n jest liczbą naturalną (dodatnią), zatem $n + 3$ jest większe od zera i $n + 2$ jest większe od zera.

Odp.: Ciąg (u_n) jest rosnący.

ZADANIE 5

Wykaż, że ciąg $a_n = 20 - n$ jest malejący.

Rozwiązanie:

Najpierw znajdujemy następny wyraz ciągu, tzn. a_{n+1}:

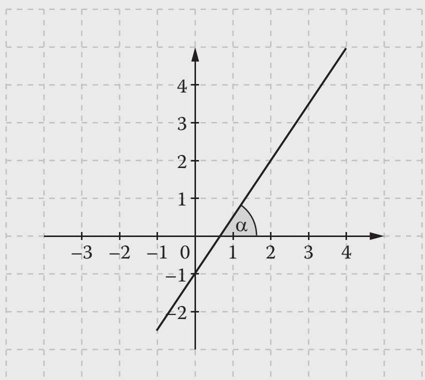
$$a_{n+1} = 20 - (n+1)$$

Rozdział III
Geometria analityczna

POSTAĆ OGÓLNA RÓWNANIA PROSTEJ

Równanie $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.
Zarówno w funkcji liniowej, jak w równaniu kierunkowym współczynnik a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**, zaś b nazywamy **wyrazem wolnym**.
Współczynnik kierunkowy prostej a jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi OX.

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$



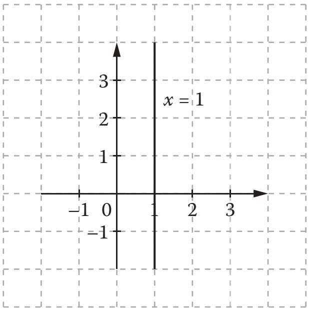
Istnieje też inna postać równania prostej.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Za pomocą równania ogólnego można opisać wszystkie proste, również proste niebędące funkcjami, czyli równoległe do osi OY. Mają one równanie $x = b$, powstają z równania ogólnego: $x - b = 0$, gdzie $(b, 0)$ to punkt, w którym ich wykresy przecinają oś OX.

PRZYKŁAD 1

Prosta $x - 1 = 0$, czyli $x = 1$, jest równoległa do osi OY i przecina oś OX w punkcie $(1, 0)$.



Aby narysować prostą o danym równaniu ogólnym, trzeba przekształcić je do równania kierunkowego, po czym narysować wykres powstałej funkcji liniowej.
Jeśli równanie kierunkowe nie istnieje (bo nie ma y), musimy wyliczyć x, wówczas otrzymamy równanie $x = b$ i na wykresie możemy poprowadzić prostą równoległą do osi OY przechodzącą przez punkt $(b, 0)$.

PRZYKŁAD 2

Dane jest równanie prostej w postaci ogólnej $4x + 2y - 10 = 0$. Przedstaw równanie tej prostej w postaci kierunkowej.

$4x + 2y - 10 = 0$

$2y = -4x + 10 \quad / : 2$

Przenosimy $4x$ i wyraz wolny na prawą stronę.

$y = -2x + 5$

Dzielimy przez współczynnik stojący przy y.

PRZYKŁAD 3

Dane jest równanie w postaci kierunkowej $y = \frac{1}{3}x + 5$. Przedstaw równanie tej prostej w postaci ogólnej.

$y = \frac{1}{3}x + 5 \quad / \cdot 3$

$3y = x + 15$

$-x + 3y - 15 = 0$

Mnożymy przez 3, dzięki temu pozbędziemy się ułamka.
Przenosimy wszystkie liczby na lewą stronę i porządkujemy.

ZADANIE 1

Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(-10, -2)$ oraz $B(4, 6)$. Zapisz je w postaci ogólnej.

Rozwiązanie:

Obliczmy współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ możemy policzyć ze wzoru:
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$a = \frac{6-(-2)}{4-(-10)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

$A(\underset{x_1}{-10}, \underset{y_1}{-2})$ $\quad$ $B(\underset{x_2}{4}, \underset{y_2}{6})$

Podstawiamy wyliczony współczynnik kierunkowy do wzoru:

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{4}{7}x + b$$

Aby wyliczyć współczynnik b, podstawiamy do wzoru współrzędne punktu A lub punktu B.

Podstawiamy punkt A:

$$-2 = \frac{4}{7}\cdot(-10) + b$$

$$-2 = -\frac{40}{7} + b$$

$$-\frac{14}{7} + \frac{40}{7} = b$$

Wykonujemy działania na ułamkach, sprowadzamy do wspólnego mianownika.

$$\frac{26}{7} = b$$

Równanie kierunkowe naszej prostej ma więc postać:

$$y = \frac{4}{7}x + \frac{26}{7}$$

Teraz zostało nam przekształcić postać kierunkową w postać ogólną prostej:

$$y = \frac{4}{7}x + \frac{26}{7} \quad /\cdot 7$$

Mnożąc przez 7, pozbędziemy się ułamków.

$$7y = 4x + 26$$

Zatem postać ogólna prostej ma wzór:

$$-4x + 7y - 26 = 0$$

ZADANIE 2

Dana jest prosta o równaniu $-x + y + 6 = 0$. Pod jakim kątem jest ona nachylona do osi OX?

Rozwiązanie:

Przekształćmy równanie ogólnej prostej do postaci kierunkowej:

$$-x + y + 6 = 0$$

$$y = x - 6$$

Współczynnik kierunkowy $a = 1$, więc $1 = \operatorname{tg}\alpha$.

$a = \operatorname{tg}\alpha$

Z tabeli odczytujemy wartość kąta:

$$\alpha = 45°$$

Odp.: Prosta jest nachylona pod kątem 45°.

	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ZADANIE 3

Punkty $A(-2, -4)$, $B(4, 8)$, $C(k, -6)$ leżą na jednej prostej. Wyznacz wartość parametru k.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od wyznaczenia równania prostej, przez którą przechodzą punkty $A(-2, -4)$ i $B(4, 8)$.
Obliczmy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{8-(-4)}{4-(-2)} = \frac{12}{6} = 2$$

$A(\underset{x_1}{-2}, \underset{y_1}{-4})$ $B(\underset{x_2}{4}, \underset{y_2}{8})$

Podstawiamy wyliczony współczynnik kierunkowy do wzoru:

$$y = ax + b$$

$$y = 2x + b$$

Podstawiamy punkt A:

Aby wyliczyć współczynnik b, podstawiamy do wzoru współrzędne punktu A lub punktu B.

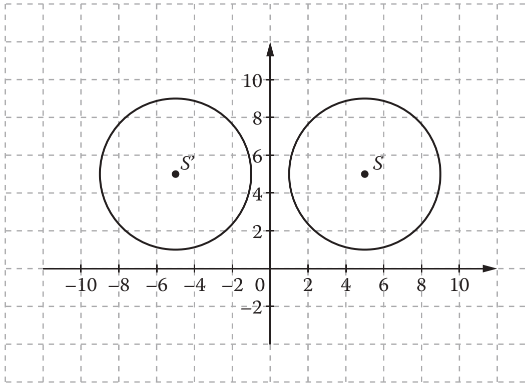
$$-4 = 2 \cdot (-2) + b$$

$$-4 = -4 + b$$

$$-4 + 4 = b$$

Zatem równanie okręgu ma postać:

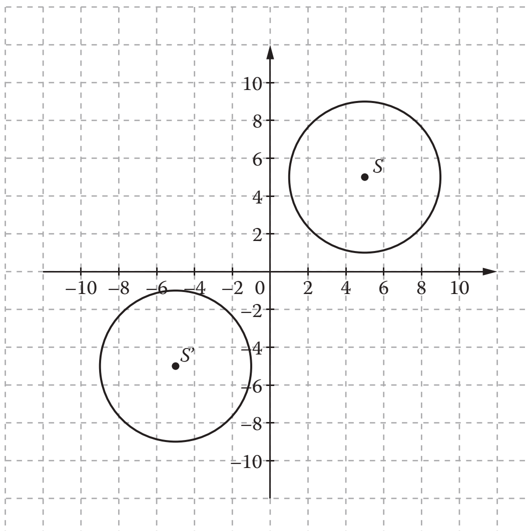
$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 16$



3) Równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych:
   – promień okręgu się nie zmienia;
   – środek okręgu symetryczny względem osi ma współrzędne (–5, –5).

Zatem równanie okręgu ma postać:

$(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 16$



ZADANIE 5

Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=25\\ 4x+2y-8=0\end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=25\\ 4x+2y-8=0\end{cases}$$

Wyznaczamy zmienną y z drugiego równania.

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 25 \\ 2y = -4x + 8 \quad /:2 \end{cases}$$

Dzielimy drugie równanie przez 2.

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 25 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Podstawiamy y do pierwszego równania.

$(x + 3)^2 + (-2x + 4)^2 = 25$

$(x + 3)^2 + (4 - 2x)^2 = 25$

Wykorzystujemy wzór na kwadrat sumy:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
oraz kwadrat różnicy:
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$x^2 + 6x + 9 + 16 - 16x + 4x^2 = 25$

Redukujemy wyrazy podobne.

$5x^2 - 10x = 0$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$5x(x - 2) = 0$

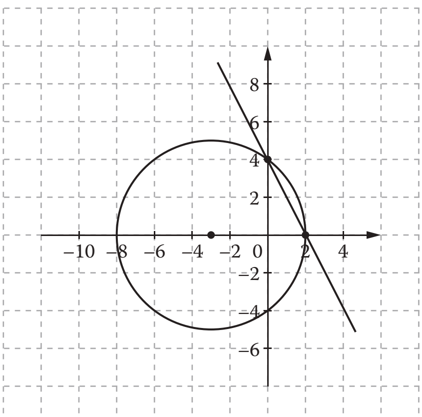
Wyrażenie to będzie równe 0, gdy $5x = 0$ lub $x - 2 = 0$. Zatem:

$x = 0$ lub $x = 2$

Wróćmy do naszego podstawienia i obliczmy wartość y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna:



Rozdział IV
Statystyka

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA, MEDIANA, DOMINANTA

Jak pamiętasz ze szkoły podstawowej, statystyka to nauka zajmująca się opisywaniem i analizą danych uzyskanych podczas badań statystycznych. Ze statystyką spotykasz się na co dzień – opierają się na niej np. badania opinii publicznej, różnego rodzaju raporty dotyczące zainteresowań, poglądów, zachowań i sposobu życia określonych grup ludzi. Tabele z danymi statystycznymi widujesz w podręczniku do geografii, biologii, historii. Statystyka udziela odpowiedzi na pytania w rodzaju: *Ile procent polskich par ma troje dzieci? Jaka część Polaków chodzi do teatru? Które miejsce w światowych zbiorach mandarynek zajmuje Brazylia? Jak wiele osób zgadza się z poglądem, że...* itp. Do przedstawiania danych statystycznych oprócz tabel służą też rozmaite typy wykresów i diagramów.

Przy wyciąganiu wniosków z danych statystycznych posługujemy się kilkoma ważnymi pojęciami.

Średnią arytmetyczną (inaczej: średnią lub przeciętną) z n liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dla $n \geq 1$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$\overline{x}$ – ozn. średnią arytmetyczną.

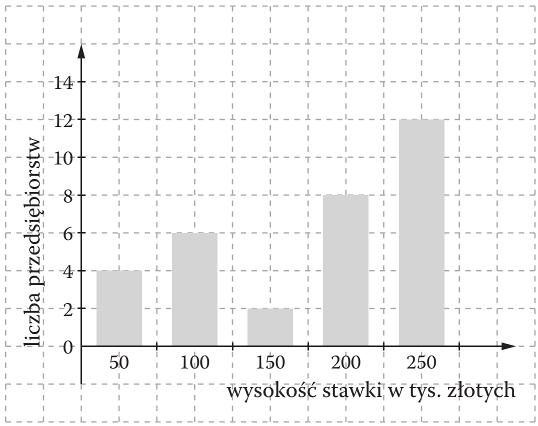
Średnią arytmetyczną ważoną z wartości: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, którym odpowiadają wagi $n_1, n_2, \ldots, n_k$, gdzie $k \in \mathrm{N}$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

ZADANIE 7

Diagram przedstawia liczbę przedsiębiorstw w pewnej gminie, płacących podatek roczny w określonej wysokości. Oblicz:

a) średnią stawkę podatku rocznego przypadającego na przedsiębiorstwa z tego zestawienia,
b) podatek dominujący,
c) wysokość podatku, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw.



Rozwiązanie:

> Obliczamy średnią arytmetyczną ważoną.

Ad a) Z diagramu wynika, że wszystkich przedsiębiorstw jest 32 – dodajemy liczby przedsiębiorstw płacących każdą stawkę. **Uwaga!** Liczba przedsiębiorstw **nie jest** najwyższą liczbą na pionowej osi diagramu.
Zatem:

$$\overline{x}=\frac{4\cdot 50000+6\cdot 10000+2\cdot 150000+8\cdot 200000+12\cdot 250000}{32}=$$

$$=\frac{200000+600000+300000+1600000+3000000}{32}=\frac{5700000}{32}=178125$$

Odp.: Średnia wysokość podatku wynosi 178 125 zł.

> Dominantą jest podatek w wysokości 250 tys. zł, gdyż powtarza się on najczęściej (12 spośród 32 firm płaci taki podatek).

Ad b)

Odp.: Podatek dominujący wynosi 250 tys. zł.

> $n=32$ jest liczbą parzystą, więc:
> $$m_e=\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Ad c) Podatek, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw, jest medianą. Liczbą wartości jest liczba przedsiębiorstw, czyli 32.

Zatem:

$$m_e = \frac{x_{16} + x_{17}}{2}$$

Skoro $x_{16} = 200000$ i $x_{17} = 200000$

$$m_e = \frac{400000}{2} = 200000$$

Z wykresu odczytujemy, że pierwsze 4 wartości to podatek w wysokości 50 tys. zł, następne kolejne 6 wartości (x_5 do x_{10}) to podatek w wysokości 100 tys. zł, $x_{11} = x_{12} = 150$ tys. zł, wartości od x_{13} do x_{20} wynoszą 200 tys. zł, natomiast od x_{21} do x_{32} po 250 tys. zł.

Odp.: Podatek, którego nie przekroczyła połowa firm, wynosi 200 000 zł.

ZADANIE 8

W pewnej klasie liczącej 20 uczniów zebrano dane dotyczące liczby godzin spędzanych dziennie, przez pojedynczego ucznia, przed komputerem. Uzyskano następujące dane (w godzinach):

3	3,5	4,5	4,5	5,5	4	3	4	4,5	1,5	3,5	4	2	2	1,5	3,5	4	3	3,5	4

a) Uporządkuj dane i przedstaw je w postaci histogramu liczebności.
b) Wyznacz średnią arytmetyczną i medianę liczby godzin spędzonych przez uczniów przed komputerem.
c) Zbuduj szereg rozdzielczy i oblicz średnią ważoną.
d) Dane przedstaw w postaci diagramu kołowego.
e) Wyznacz wariancję i średnie odchylenie standardowe.

Rozwiązanie:

Ad a) Dane uporządkowane w kolejności od najniższego do najwyższego wyniku:

1,5	1,5	2	2	3	3	3	3,5	3,5	3,5	3,5	4	4	4	4	4	4,5	4,5	4,5	5,5

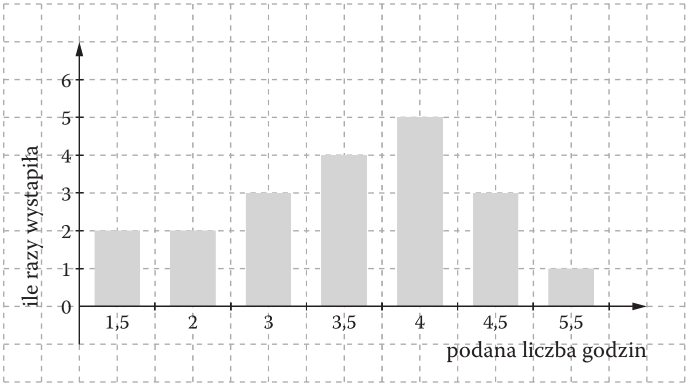
Histogram liczebności to rodzaj diagramu słupkowego, który przedstawia, jak często w badaniu pojawia się dana cecha. Aby narysować histogram do tego zadania, musisz najpierw wiedzieć, jak często uczniowie podawali daną liczbę godzin. A zatem rozpisujemy, dla czytelności najlepiej w tabeli:

Siedem różnych odpowiedzi, czyli histogram będzie mieć siedem „prostokątów". Dane zaznaczamy na osi poziomej.

Częstotliwość występowania danych zaznaczamy na osi pionowej. Przyjmujemy skalę od 1 do 5 (nie ma wyniku 6, dla czytelności można go zaznaczyć).

Podana liczba godzin	1,5	2	3	3,5	4	4,5	5,5
Ile razy wystąpiła	2	2	3	4	5	3	1

Teraz możemy już narysować wykres.



Ad b) Średnia arytmetyczna:

$$\overline{x} = \frac{1,5+1,5+2+2+3+3+3+3,5+3,5+3,5+3,5+4+4+4+4+}{20}$$

$$\frac{+4+4,5+4,5+4,5+5,5}{20} = 3,45$$

Mediana $= \dfrac{3,5+3,5}{2} = 3,5$

Liczba danych jest parzysta (20 wyników), medianę wyliczamy z dwóch środkowych (czyli dziesiątego i jedenastego).

Ad c) Szereg rozdzielczy.

Szereg rozdzielczy to tabela prezentująca dane statystyczne. Są one przedstawione w taki sposób, że dzieli się je na pewne kategorie, a następnie umieszcza w tabeli informacje, ile wyników uzyskano w obrębie każdej kategorii i jakie to były wyniki. W poniższej tabeli znajdziesz wyniki podzielone na klasy według liczby godzin (przedziały od 0 do 1 godziny, od 1 do 2 godzin itd.), konkretne wyniki w danym przedziale oraz ich liczbę.

Klasa (liczba godzin)	Dane (uzyskane w tej klasie wyniki)	Liczebność (liczba wyników)
$\langle 0, 1)$	[brak wyników]	0
$\langle 1, 2)$	1,5 ; 1,5	2
$\langle 2, 3)$	2 ; 2	2
$\langle 3, 4)$	3 ; 3 ; 3 ; 3,5 ; 3,5 ; 3,5 ; 3,5	7
$\langle 4, 5)$	4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4,5 ; 4,5 ; 4,5	8
$\langle 5, 6\rangle$	5,5	1

$$\text{Średnia ważona } = \frac{2\cdot 1,5+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 3,5+5\cdot 4+3\cdot 4,5+1\cdot 5,5}{20} =$$

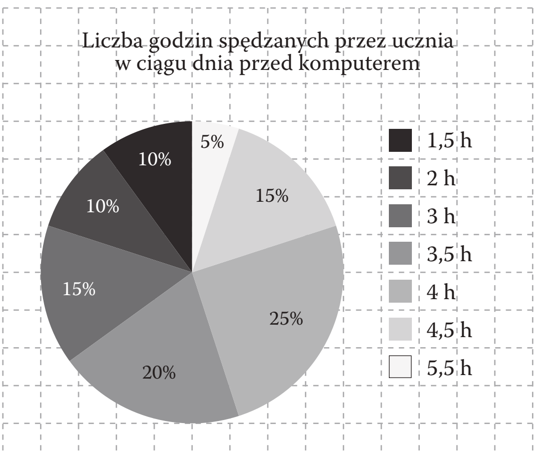
$$= \frac{3+4+9+14+20+13,5+5,5}{20} = \frac{69}{20} = 3,45$$

Zwróć uwagę, że tak liczona średnia ważona to dokładnie średnia arytmetyczna z punktu b).

Ad d) Diagram kołowy.

Diagram kołowy przedstawia procentowy udział każdego wyniku w całości wyników. Aby go przygotować, musisz najpierw sprawdzić, jaka jest częstość każdego wyniku, a potem zamienić uzyskany ułamek na procenty. Dla ułatwienia rozpiszmy to w tabeli.

Liczba godzin	**Liczebność**	**Częstość**	**Częstość w %**
1,5	2	$\frac{2}{20}$	10%
2	2	$\frac{2}{20}$	10%
3	3	$\frac{3}{20}$	15%
3,5	4	$\frac{4}{20}$	20%
4	5	$\frac{5}{20}$	25%
4,5	3	$\frac{3}{20}$	15%
5,5	1	$\frac{1}{20}$	5%



Ad e) Wariancja:

$$\frac{2\cdot(1{,}5-3{,}45)^2+2\cdot(2-3{,}45)^2+3\cdot(3-3{,}45)^2+4\cdot(3{,}5-3{,}45)^2+}{20}$$

$$\frac{+5\cdot(4-3{,}45)^2+3\cdot(4{,}5-3{,}45)^2+(5{,}5-3{,}45)^2}{20}=1{,}0725$$

Średnie odchylenie standardowe = $\sqrt{1{,}0725}\approx 1{,}04$.

Nowe KOREPETYCJE

dla nowej szkoły średniej!

Nowe KOREPETYCJE MATEMATYKA obejmują **wszystkie zagadnienia z podstawy programowej z zakresu podstawowego**. Każdy dział posiada rozbudowaną część teoretyczną wraz z przykładami, która przystępnie wyjaśnia wszystkie nowe zagadnienia, a także przypomina potrzebne informacje z wcześniejszych lat nauki. Zadania odpowiadają typom zadań, jakie będą pojawiać się na klasówkach i sprawdzianach. **Rozwiązanie każdego zadania zostało omówione** krok po kroku, dzięki czemu można przeanalizować i zrozumieć tok działania. Układ działów w poszczególnych częściach serii odpowiada najpopularniejszym podręcznikom.

ISBN 978-83-7517-949-1

Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B ▪ 31-979 Kraków
www.greg.pl