polecana
przez najlepszych
nauczycieli

liceum
technikum

nowa szkoła średnia

MATEMATYKA korepetycje 2

- funkcje kwadratowe, wymierne, wielomianowe, trygonometryczne
- planimetria i trygonometria
- twierdzenie sinusów i cosinusów
- wszystkie zadania z rozwiązaniami
- objaśnienia krok po kroku
- przydatne wzory i definicje

pewniak na teście — pewniaki na test

GREG
WYDAWNICTWO EDUKACYJNE

liceum
technikum

MATEMATYKA
korepetycje

LICEUM – część 2

Autorka:
Grażyna Kiełczykowska

Wykorzystano materiały autorstwa:
Roberta Całki, Joanny Firlit, Romana Gancarczyka, Katarzyny Korpak, Urszuli Zięby

Redaktor prowadzący serii:
Agnieszka Antosiewicz

Redakcja i korekta:
Karolina Rymut, Maria Zagnińska

ISBN: 978-83-7517-938-5

Wydawnictwo GREG®
31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B
tel. 12 680 15 50
www.greg.pl

Księgarnia internetowa: www.greg.pl

Okładka:
Aleksandra Zimoch

Wykorzystano zdjęcie: Syda Productions/Shutterstock.com

Skład:
Pracownia Słowa

Spis treści

Wstęp

Drogi Uczniu!

Trzymasz w ręce drugą część serii *Korepetycje matematyka – liceum*, przeznaczoną dla uczniów klasy drugiej. Jeśli korzystałeś z części pierwszej, to na pewno wiesz już, jak prosta i skuteczna jest nauka matematyki dzięki tej serii, a jeżeli to Twoje pierwsze zetknięcie z nią, to gorąco Ci ją polecamy. **Ta książka w pełni zastąpi kosztowne korepetycje!**

W książce znajdziesz pięć działów: ***Funkcja kwadratowa***; ***Planimetria***; ***Wielomiany***; ***Funkcja wymierna***; ***Trygonometria***. W każdym z nich zamieszczono **dokładnie wytłumaczone zagadnienia teoretyczne** wraz z objaśnieniami i przykładami, dzięki którym każde zagadnienie łatwo można zrozumieć. Wszystkie zadania w książce są **rozwiązane krok po kroku, a rozwiązania opatrzono komentarzami**, dzięki którym możesz prześledzić tok rozumowania i nauczyć się, jak takie zadania rozwiązywać.

Dodatkowo publikacja jest przemyślana graficznie, czytelna i przejrzysta, dzięki czemu pracuje się z nią szybko i przyjemnie.

Druga część zupełnie nowej odsłony serii *Korepetycje matematyka – liceum* to publikacja **zgodna z aktualną podstawą programową** i zawierająca cały wymagany materiał.

Życzymy Ci więc samych sukcesów na lekcjach matematyki – i nie mamy wątpliwości, że korzystając z naszych *Korepetycji,* na pewno je osiągniesz!

Autorka
i Wydawnictwo GREG

Rozdział I
Funkcja kwadratowa

POSTAĆ OGÓLNA, ILOCZYNOWA I KANONICZNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

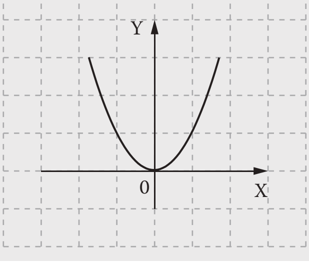
Trójmianem kwadratowym w postaci ogólnej nazywamy funkcję:

$y = ax^2 + bx + c$,	gdzie $a \neq 0$ i $b, c \in R$
np.: $y = -5x^2 + 6x - 2$	$a = -5, b = 6, c = -2$
$y = x^2 - 1$	$a = 1, b = 0, c = -1$
$y = 2x^2 + x$	$a = 2, b = 1, c = 0$
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 0$

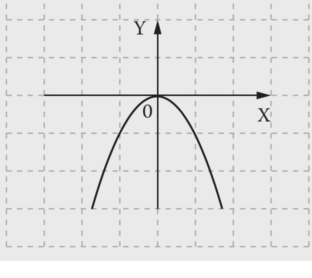
Scharakteryzujmy funkcję kwadratową $y = ax^2$.

Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2$, $a \neq 0$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $(0, 0)$.

Jeżeli $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.



Jeżeli $a < 0$, to ramiona paraboli są zawsze skierowane w dół.



Rozchylenie ramion jest tym większe, im mniejsza jest wartość $|a|$.

Pamiętajmy, że wykres funkcji $y = ax^2$ jest symetryczny względem osi OY.

Aby otrzymać funkcję $y = ax^2 + bx + c$, należy funkcję $y = ax^2$ przesunąć wzdłuż osi OX o p jednostek i wzdłuż osi OY o q jednostek, gdzie

$p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Wykresem funkcji $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola przystająca do paraboli $y = ax^2$.

Osią symetrii paraboli jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zaś punkt przecięcia z osią OY to $(0, c)$.

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem trójmianu** kwadratowego, np.:

$y = -5x^2 + 6x - 2$
$a = -5$
$b = 6$
$c = -2$

Wówczas:

$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-2) = 36 - 40 = -4$.

Postać kanoniczna trójmianu $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ to:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Czyli: $y = a(x - p)^2 + q$

Wykresem **funkcji kwadratowej** $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

UWAGA!

Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej możemy odczytać wierzchołek paraboli. Jak już mówiliśmy, wierzchołkiem paraboli $y = ax^2$ jest punkt $(0, 0)$. Zwróć uwagę, że x_w i y_w pokrywają się z wielkościami p i q definiowanymi wcześniej.

Miejsca zerowe paraboli nazywamy pierwiastkami.
Jeżeli $\Delta > \mathbf{0}$, to trójmian $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Jeżeli Δ **= 0**, to trójmian $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ ma jeden pierwiastek (podwójny):

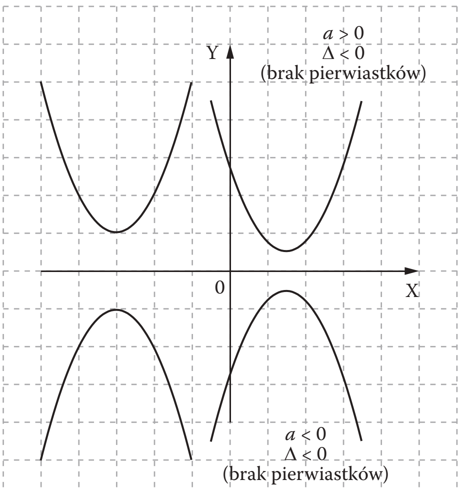
$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

Jeżeli Δ **< 0**, to trójmian $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ nie ma pierwiastków.

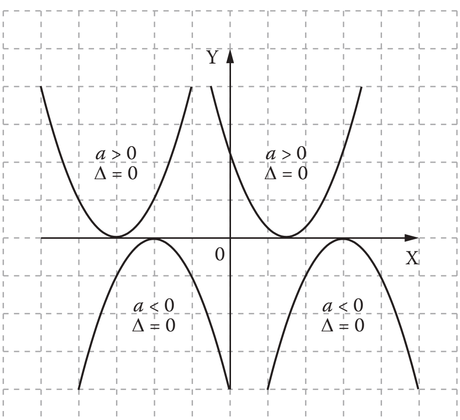
Postać iloczynowa trójmianu $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0$ i $\Delta \geq 0)$ dana jest wzorem $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Zapamiętaj następujące przypadki związane z funkcją kwadratową, zilustrowane poniżej:

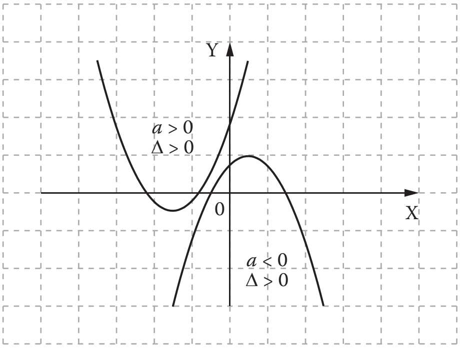
PRZYKŁAD 1



Parabola nie przecina osi OX, co jest równoznaczne z tym, że nie ma miejsc zerowych (trójmian nie ma pierwiastków).



Parabola ma jeden punkt wspólny z osią OX, co jest równoznaczne z tym, że ma jedno miejsce zerowe – podwójne (trójmian ma jeden pierwiastek podwójny).



Parabola przecina oś OX w dwóch punktach, co jest równoznaczne z tym, że ma dwa miejsca zerowe (trójmian ma dwa pierwiastki).

ZADANIE 1

Sprowadź do postaci kanonicznej funkcję kwadratową daną w postaci ogólnej $f(x) = -x^2 + 5x - 7$.

Rozwiązanie:

$a = -1,\ b = 5,\ c = -7$

$$f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q$$

Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest obliczenie wielkości występujących we wzorze na postać kanoniczną.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2} = 2{,}5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 28 = -3$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$f(x) = -(x - 2{,}5)^2 - 0{,}75$$

Postać kanoniczna.

ZADANIE 2

Sprowadź do postaci ogólnej funkcję kwadratową daną w postaci kanonicznej $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 10$.

Rozwiązanie:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4x + 4) - 10 =$$

Należy uporządkować trójmian.

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - 10 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 8$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 8$$

Postać ogólna.

ZADANIE 3

Dany trójmian kwadratowy $f(x)=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$ sprowadź do postaci iloczynowej.

Rozwiązanie:

$$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\left[(x-3)^2-9\right]=-\frac{1}{3}\cdot\left[(x-3-3)\cdot(x-3+3)\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot(x-6)\cdot x$$

Jednym ze sposobów rozwiązania zadania jest wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia.

$$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot x\cdot(x-6)$$

Postać iloczynowa.

ZADANIE 4

Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej $f(x) = 2(x + 1) \cdot (x + 5)$. Podaj jej postać kanoniczną.

Rozwiązanie:

$$f(x)=2\cdot\left(x^2+6x+5\right)=2x^2+12x+10$$

Najpierw zamieniamy daną postać na ogólną, a następnie obliczamy potrzebne współczynniki.

$$p=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{4}=-3$$

$$\Delta=b^2-4ac=144-80=64$$

$$q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-64}{8}=-8$$

$$f(x)=2(x+3)^2-8$$

Postać kanoniczna.

Uwaga! Pamiętajmy, że p i q to współrzędne wierzchołka paraboli. Dlatego $q = f(p)$, czyli $q = 2 \cdot (-3 + 1)(-3 + 5) = -8$. Możesz wybrać, która metoda liczenia wydaje się wygodniejsza.

ZADANIE 5

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

a) Wyznacz współczynniki b i c.
b) Podaj jej postać kanoniczną.
c) Podaj postać iloczynową tej funkcji.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane liczby są miejscami zerowymi, zatem wartość funkcji dla tych argumentów jest równa zero. Na tej podstawie układamy układ równań i obliczamy wartości szukanych współczynników.

Ad a) $\begin{cases} 2\cdot 9+3b+c=0 \\ 2\cdot 1-b+c=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3b+c=-18 \\ c=b-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3b+b-2=-18 \\ c=b-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4b=-16 \\ c=b-2 \end{cases}$

$\begin{cases} b=-4 \\ c=-6 \end{cases}$

Oczywiście podpunkt a) można było rozwiązać, przekształcając postać iloczynową do postaci ogólnej, czyli wymnażając te nawiasy.

Znajdujemy postać kanoniczną innym sposobem, niż robiliśmy to dotychczas. Sposób polega na uzupełnianiu do wzoru skróconego mnożenia.

Ad b) $f(x)=2x^2-4x-6=2\cdot\left(x^2-2x\right)-6=$

$=2\cdot\left(x^2-2x+1-1\right)-6=$

$=2\cdot\left[\left(x-1\right)^2-1\right]-6=$

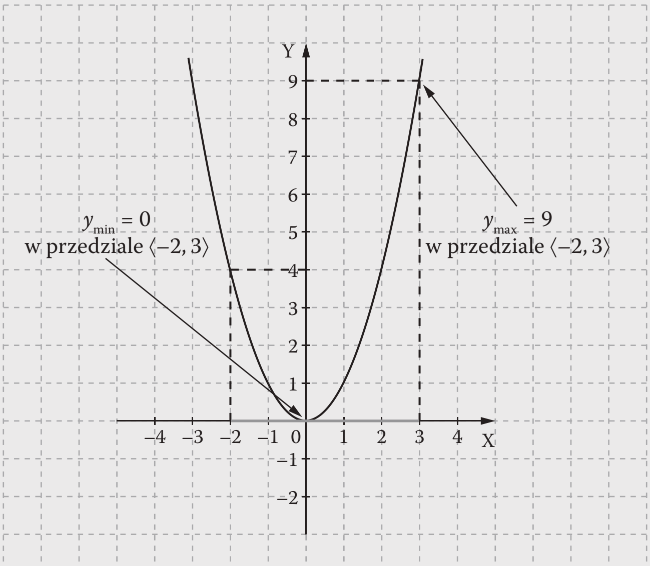
$=2\left(x-1\right)^2-2-6=2\left(x-1\right)^2-8$

Postać iloczynowa. Wystarczy dane w treści zadania miejsca zerowe wstawić do wzoru na postać iloczynową.

Ad c) $f(x)=2\left(x+1\right)\cdot\left(x-3\right)$

WARTOŚĆ NAJWIĘKSZA I NAJMNIEJSZA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Aby wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w jakimś przedziale, warto narysować jej wykres.
Niech $f(x) = x^2$. Wykresem jest parabola. Wyznaczmy jej wartość największą i wartość najmniejszą w przedziale $\langle -2, 3\rangle$.



Z powyższego rysunku widać, że w przedziale $\langle -2, 3\rangle$ wartość największa jest dla argumentu $x = 3$ i wynosi 9, a wartość najmniejsza dla $x = 0$ i wynosi 0, czyli jest to wierzchołek paraboli.

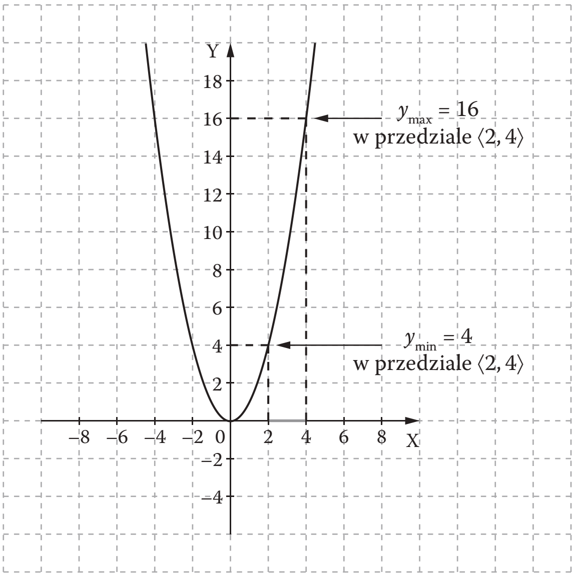
Możemy zapisać to następująco:

$y_{max} = f(3) = 9$

$y_{min} = f(0) = 0$

PRZYKŁAD 1

Rozważmy przedział ⟨2, 4⟩. Przeanalizujmy wykres:



Zatem widać, że w przedziale ⟨2, 4⟩ wartość największa jest dla argumentu $x = 4$ i wynosi 16, a wartość najmniejsza dla $x = 2$ i wynosi 4.

Możemy zapisać to następująco:
$y_{max} = f(4) = 16$
$y_{min} = f(2) = 4$

Jak obliczyć wartość największą i najmniejszą bez rysunku?

Wykonujemy trzy kroki:

Krok 1: Wyznaczamy wierzchołek paraboli i sprawdzamy, czy x_w należy do danego przedziału. Jeśli tak, bierzemy go pod uwagę w analizie, jeśli nie – pomijamy.

Krok 2: Obliczamy wartość funkcji na krańcach przedziału.

Krok 3: Dokonujemy wyboru, która wartość jest najmniejsza, a która największa.

PRZYKŁAD 2

Znajdźmy teraz wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = (x - 2)^2 + 2$ w przedziale ⟨–4, 3⟩.

Krok 1. Wierzchołek paraboli ma współrzędne (2, 2), więc x_w należy do rozpatrywanego przedziału.

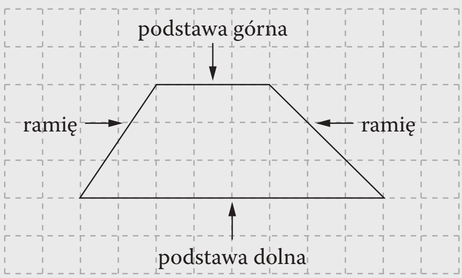
Funkcja jest przedstawiona w postaci kanonicznej, więc łatwo odczytać współrzędne wierzchołka wykresu funkcji.

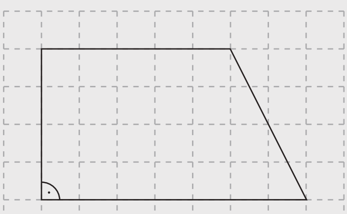
Rozdział II
Planimetria

CZWOROKĄTY

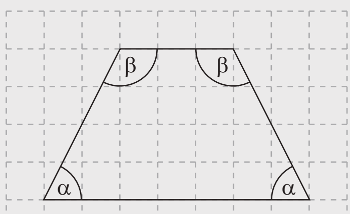
Wielokąt, który ma cztery boki, nazywa się czworokątem.
Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°.

TRAPEZ
Trapez – to taki czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.





trapez prostokątny
(ma co najmniej 1 kąt prosty)



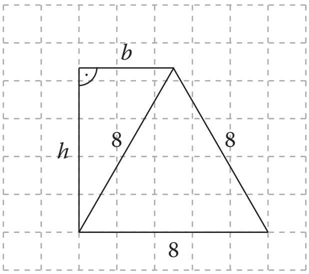
trapez równoramienny
(ramiona są równej długości)

W trapezie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

ZADANIE 2

W trapezie prostokątnym dłuższa podstawa ma długość 8 cm. Oblicz pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że krótsza przekątna podzieliła go na trójkąt równoboczny i prostokątny.

Rozwiązanie:



Dłuższa podstawa to jeden z boków trójkąta równobocznego, zatem wiemy, że wszystkie jego boki mają 8 cm długości.

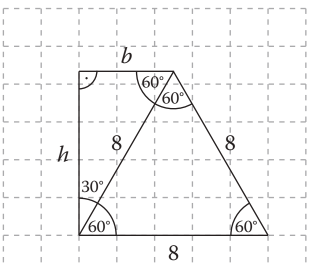
Zauważ, że wysokość trapezu prostokątnego jest równa wysokości trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Wzór na wysokość trójkąta równobocznego:

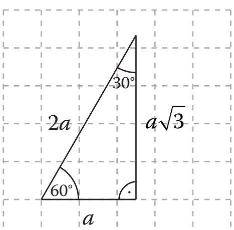
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zauważ, że powstały trójkąt prostokątny ma kąty miary 30°, 60°, 90°.

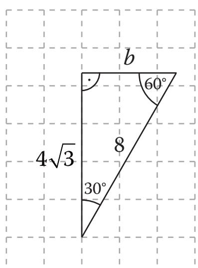


Dlatego, że w trójkącie równobocznym miary kątów są równe i wynoszą 60°.

Kąt rozwarty trapezu ma miarę 120°. Zatem 120° – 60° = 60°.
Przypomnijmy zależności pomiędzy bokami w trójkącie prostokątnym o kątach 30°, 60°, 90°.



W naszym przypadku



Rozdział III
Wielomiany

INFORMACJE O WIELOMIANACH

Jednomianem zmiennej rzeczywistej nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathrm{R}$, $n \in \mathrm{N}$.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem jednomianu**.

Jeśli $a \neq 0$, to n nazywamy **stopniem jednomianu**.

$$y = ax^n$$

współczynnik jednomianu	stopień jednomianu

Na przykład: $y = -6x^2$, $y = 10x^8$.

Funkcja $y = a$, gdzie $a \neq 0$, jest **jednomianem stopnia 0**.

Funkcja stała $y = 0$ jest jednomianem, którego stopnia nie określamy.

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**.

PRZYKŁAD 1

$y = 2x^3 - 5x$ dwumian trzeciego stopnia
$y = x^7 + x^5$ dwumian siódmego stopnia
$y = x^2 - 3x^6$ dwumian szóstego stopnia

Nazwa pochodzi od tego wyrazu wielomianu, który ma najwyższy stopień, niezależnie od jego pozycji.

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**.
Sumę trzech jednomianów stopnia 0, 1 i 2 nazywamy **trójmianem kwadratowym**.

ZADANIE 2

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów:

$W(x) = -2x^2 - 5$ i $V(x) = 4x^3 - 3x + 1$

Rozwiązanie:

$W(x) + V(x) = -2x^2 \underline{- 5} + 4x^3 - 3x \underline{+ 1}$

Redukujemy wyrazy podobne.

$W(x) + V(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x - 4$

Ustawiamy wyrazy wielomianu od najwyższej potęgi do najniższej.

$W(x) - V(x) = -2x^2 - 5 - (4x^3 - 3x + 1) =$

$= -2x^2 \underline{- 5} - 4x^3 + 3x \underline{- 1}$

Redukujemy wyrazy podobne.

$W(x) - V(x) = -4x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

Ustawiamy wyrazy wielomianu od najwyższej potęgi do najniższej.

ZADANIE 3

Wyznacz iloczyn wielomianów W i V. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny otrzymanego wielomianu:

$W(x) = 2x^2 + 1$, $V(x) = -3x^4 - 3$

Rozwiązanie:

$W(x) \cdot V(x) = (2x^2 + 1)(-3x^4 - 3)$

Mnożymy każdy wyraz pierwszego nawiasu przez każdy wyraz drugiego nawiasu. Pamiętaj o znakach.

$W(x) \cdot V(x) = -6x^6 - 6x^2 - 3x^4 - 3$

$W(x) \cdot V(x) = -6x^6 - 3x^4 - 6x^2 - 3$

Ustawiamy wyrazy wielomianu od najwyższej potęgi do najniższej.

Odp.: Współczynnik przy najwyższej potędze wynosi -6, a wyrazem wolnym jest liczba -3.

ZADANIE 4

Wyznacz współczynniki a, b, c, wiedząc, że $W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$, $W(-1) = 1$, $W(0) = 1$, $W(1) = -1$. Zapisz ten wielomian.

Rozwiązanie:

Skoro dla wielomianu $W(x)$ zachodzą warunki: $W(-1) = 1$, $W(0) = 1$, $W(1) = -1$, to możemy zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} 1 = (-1)^5 + a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 1 = c \\ -1 = 1 + a + b + c \end{cases}$$

Rozdział IV
Funkcja wymierna

WYRAŻENIA WYMIERNE

Funkcją wymierną nazywamy funkcję $F(x)=\frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami i $P(x) \neq 0$.

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci $\frac{W(x)}{P(x)}=0$, gdzie $W(x)$ i $P(x)$ oznaczają wielomiany oraz $P(x) \neq 0$.

Przy rozwiązywaniu tego typu równań pamiętaj o dziedzinie!

ZADANIE 1

Wyznacz dziedzinę i uprość wyrażenia:

a) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

b) $\frac{(x-5)(x+4)}{x^2-10x+25}:\frac{x+4}{x+5}$

Rozwiązanie:

Ad a) Aby wyznaczyć dziedzinę, musimy zadbać, aby mianownik był różny od zera (pamiętaj, że nie dzielimy przez 0).

$x^2 + x - 2 \neq 0$

Obliczmy zatem pierwiastki tego równania:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$a = 1$
$b = 1$
$c = -2$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Zatem $D = \mathrm{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Aby uprościć to wyrażenie, zapiszmy mianownik w postaci iloczynowej, licznik natomiast rozbijmy, wykorzystując różnicę kwadratów.

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej:
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Różnica kwadratów:
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

Ad b) Zauważ, że przy dzieleniu dzielnik odwracamy, zatem zarówno licznik, jak i mianownik dzielnika musi być różny od zera. Mianownik dzielnej oczywiście także. Zatem:

$$x^2 - 10x + 25 \neq 0, \quad x + 4 \neq 0, \quad x + 5 \neq 0$$

Rozwiązujemy poszczególne równania:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$$

$a = 1$
$b = -10$
$c = 25$

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{10}{2} = 5$$

$x + 4 = 0$ czyli $x = -4$

$x + 5 = 0$ czyli $x = -5$

Zatem dziedzina funkcji to $D = \mathrm{R} \setminus \{-5, -4, 5\}$.

Aby uprościć to wyrażenie, zapiszmy mianownik w postaci iloczynowej, dzielenie zamienimy na mnożenie liczby odwrotnej:

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej, gdy $\Delta = 0$:
$f(x) = a(x - x_0)^2$

$$\frac{\cancel{(x-5)}\cancel{(x+4)}}{(x-5)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{x+5}{\cancel{x+4}} = \frac{x+5}{x-5}$$

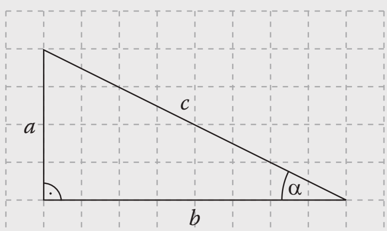
Rozdział V
Trygonometria

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

Trygonometria jest działem matematyki, który zajmuje się **zależnościami między miarami kątów wewnętrznych w trójkątach a długością jego boków**. Opierają się one na konkretnych zależnościach, które pozostają niezmienne niezależnie od wielkości trójkąta.

Trygonometria ma bardzo szerokie i powszechne zastosowanie praktyczne – na niej opierają się pomiary na powierzchni naszej planety, wyznaczanie tras i obliczenia w żegludze, działanie GPS. Wykorzystywana jest też w astronomii.

Podstawą trygonometrii są **funkcje trygonometryczne**.



Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

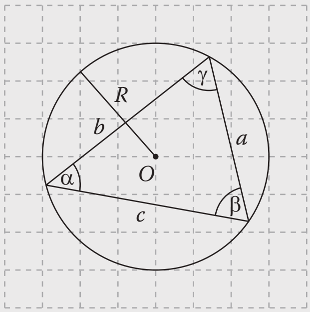
Wartości funkcji trygonometrycznych możemy także odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych. Możesz je zawsze znaleźć w swoim podręczniku do matematyki oraz na sąsiedniej stronie.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	β [°]
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

α [°]	$\sin\alpha$ $\sin\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1160	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9181	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6716**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,000**	**–**	**0**

Jest jeszcze wiele innych wzorów, które mają zastosowanie w trygonometrii. Dalej znajdziesz kilka z nich, podane w postaci twierdzeń.

TWIERDZENIE SINUSÓW I COSINUSÓW



Twierdzenie sinusów brzmi: w dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy koła opisanego na tym trójkącie.

Inaczej (spójrz na rysunek powyżej):

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R,\ \frac{b}{\sin\beta}=2R,\ \frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

albo:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

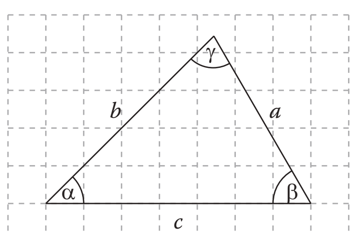
Twierdzenie to służy do tzw. rozwiązywania trójkątów, czyli znajdowania boków i kątów danych trójkątów.

ZADANIE 1

Rozwiąż trójkąt o kątach $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ i boku $c = 10$.

Rozwiązanie:

Rozwiązać trójkąt to znaczy obliczyć długości wszystkich boków i miary wszystkich kątów.



Do rozwiązania tego zadania wykorzystamy twierdzenie sinusów.

Skoro $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, to aby obliczyć miarę kąta γ, wystarczy od sumy kątów trójkąta odjąć miary kątów α i β.

$$\gamma = 180° - (45° + 60°) = 180° - 105° = 75°$$

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°.

Teraz obliczmy długość boku a:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Twierdzenie sinusów.

$$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 75°}$$

Podzielmy te równości na dwie części:

$$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{10}{\sin 75°} \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sin 60°} = \frac{10}{\sin 75°}$$

Z tablic odczytujemy wartość sin 75° i podstawiamy do równania:

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{0{,}9659}$$

	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Wartość sin 45° też możemy odczytać z tablic:

α [°]	sin α cos β	tg α	β[°]
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

stopnie	0°	10°
45	0,7071	0,7092
46	0,7193	0,7214
47	0,7314	0,7333
48	0,7431	0,7451
49	0,7547	0,7566
50	0,7660	0,7679
51	0,7771	0,7790
52	0,7880	0,7898
53	0,7986	0,8004
54	0,8090	0,8107
55	0,8192	0,8208
56	0,8290	0,8307
57	0,8387	0,8403
58	0,8480	0,8496
59	0,8572	0,8587
60	0,8660	0,8675
61	0,8746	0,8760
62	0,8829	0,8843
63	0,8910	0,8923
64	0,8988	0,9001
65	0,9063	0,9075
66	0,9135	0,9147
67	0,9205	0,9216
68	0,9572	0,9283
69	0,9336	0,9346
70	0,9397	0,9407
71	0,9455	0,9465
72	0,9511	0,9520
73	0,9563	0,9572
74	0,9613	0,9621
75	0,9659	0,9667
76	0,9703	0,9710

Zatem:

$$\frac{a}{0{,}7071} = \frac{10}{0{,}9659}$$

$$a \approx 7{,}32$$

Analogicznie:

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{0{,}9659}$$

$$\frac{b}{0{,}8660} = \frac{10}{0{,}9659}$$

Nowe KOREPETYCJE

dla nowej szkoły średniej!

Obejmują **wszystkie zagadnienia z podstawy programowej z zakresu podstawowego**. Każdy dział posiada rozbudowaną **część teoretyczną** wraz z przykładami, która przystępnie wyjaśnia wszystkie nowe zagadnienia, a także przypomina potrzebne informacje z wcześniejszych lat nauki. Zadania odpowiadają typom zadań, jakie będą pojawiać się na klasówkach i sprawdzianach. **Rozwiązanie każdego zadania zostało omówione krok po kroku**, dzięki czemu można przeanalizować i zrozumieć tok działania. Układ działów w poszczególnych częściach serii odpowiada najpopularniejszym podręcznikom.

- **objaśnienia krok po kroku**
- **definicje, wzory, rysunki**
- **wszystkie wymagane zagadnienia**

ISBN 978-83-7517-938-5

GREG WYDAWNICTWO

Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B ▪ 31-979 Kraków
www.greg.pl